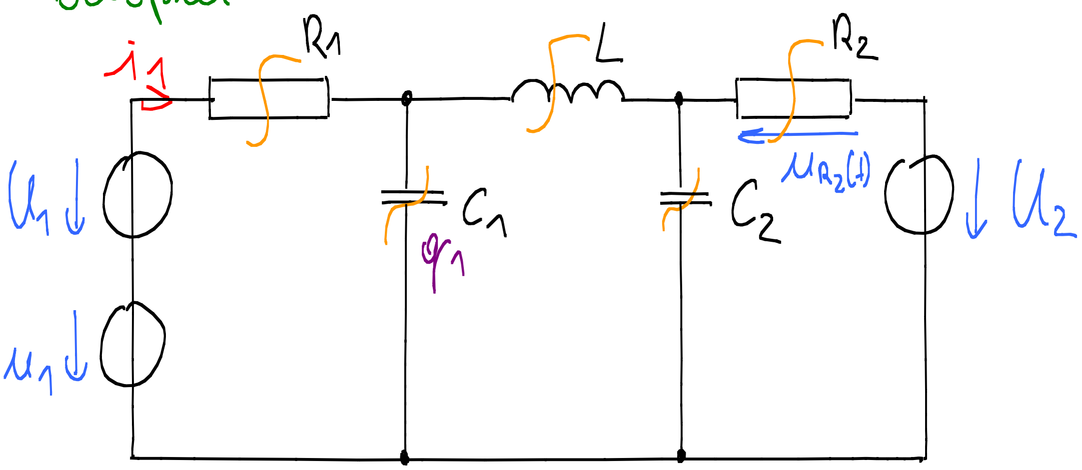
nicht lineare elektrische Systeme

Note Title ~~21.01.2008~~ 28.01.2008

Beispiel:



geg.: $U_1 = 12\,V$
$U_2 = 24\,V$

Achtung das Bsp. ist Fehlerhaft; durch diese Vertauschung stimmen wieder ein paar Werte;

$u_1 = \hat{U}_1 \cdot \cos(\omega t)$

$\hat{U}_1 = 1\,mV$

$\omega = 1000 \cdot 2\pi \frac{1}{s}$

i_1 fließt so in die Gegenrichtung

nicht lineare Beziehungen:

$q_1(u) = a_1 u^3 \qquad a_1 = 10^{-9} \frac{As}{V^3}$

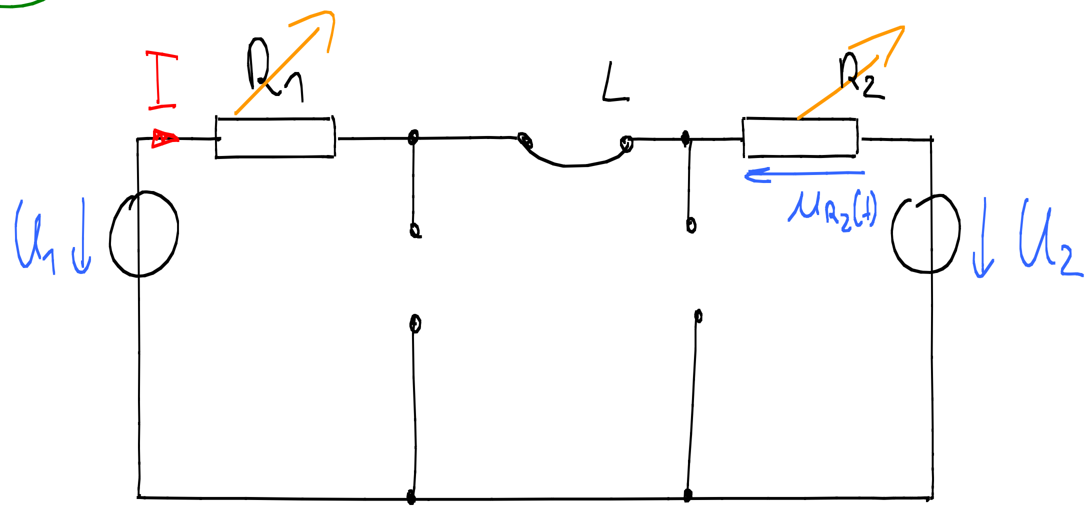
$q_2(u) = a_2 u^3 \qquad a_2 = 2 \cdot 10^{-6} \frac{As}{V^3}$

$\Phi(i) = b \cdot \sqrt{i} \qquad b = 3 \cdot 10^{-2} \frac{Vs}{\sqrt{A}}$

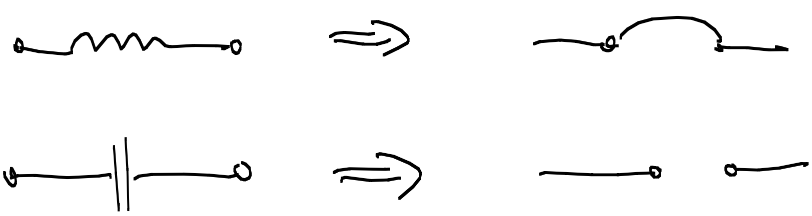
$R_1: \quad u_1 = k_1 i_1^2 \qquad k_1 = 2 \frac{V}{A^2}$

$R_2: \quad u_2 = k_2 i_2^2 \qquad k_2 = 3 \frac{V}{A^2}$

AP:



$U_1 = 12V$



Kurzschluss

Leerlauf

Direkte Iteration:

Anfangswerte für R_1, R_2:

$$R_{1(0)} \overset{!}{=} 1\Omega$$

$$R_{2(0)} \overset{!}{=} 1\Omega$$

$$R_{1(0)}, R_{2(0)} \xrightarrow{U_1, U_2} I_{(0)}$$

$$I_{(0)} = \frac{U_1 - U_2}{R_{1(0)} + R_{2(0)}} \xrightarrow{R_{1(0)}, R_{2(0)}} U_{R_1(0)}, U_{R_2(0)}$$

mit $U_{R_1(0)}, U_{R_2(0)} \xrightarrow{\text{Kennlinie } [u_1 = k_1 \cdot i_1^2]} R_{1(1)}, R_{2(1)}$

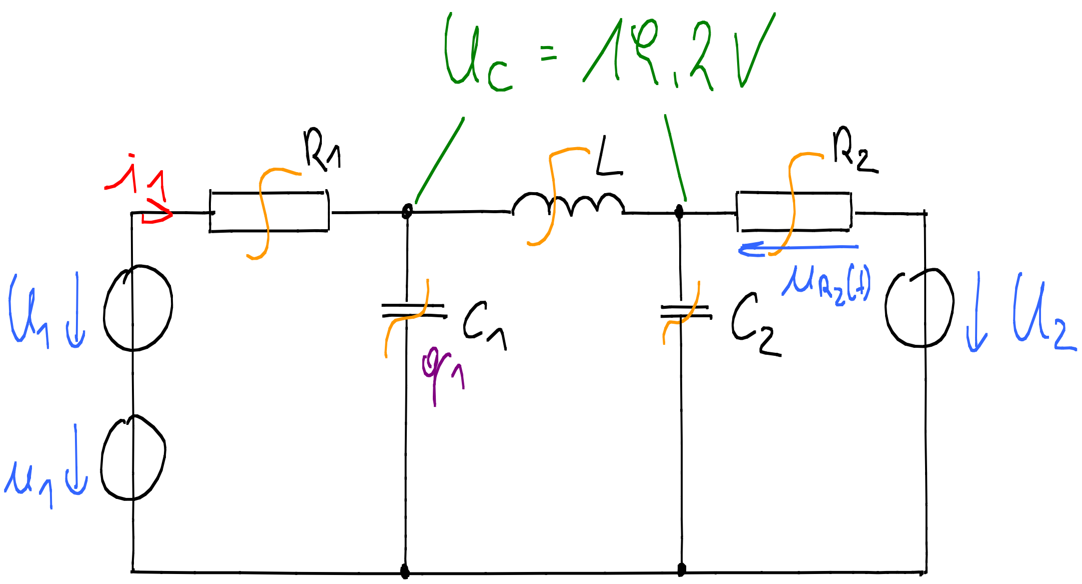
Iteration:

Iteration	R1	R2	I	Ur1	Ir1	Ur2	Ir2	Fehler
[1]	[O]	[O]	[A}	[V]	[A]	[V]	[A]	[1]
0	1	1	6	6	1,732	6	1,414	
1	3,464	4,243	1,5571	5,394	1,642	6,606	1,4884	2,0363
2	3,285	4,452						0,1378
17	3,0984	4,6476	1,5492		1,5492		1,5492	8*10^-12

$$R_{1(1)} = \frac{U_{R1(0)}}{I_{R1(0)}}$$

$$\text{Fehler} = \sqrt{\frac{\left(R_{1(0)} - R_{1(1)}\right)^2 + \left(R_{2(0)} - R_{2(1)}\right)^2}{R_{1(1)}\, R_{2(1)}}}$$

$$I_{R1} = I_{R2} = I$$



$$R_1 = 3{,}09849\ \Omega$$

$$R_2 = 4{,}6476\ \Omega$$

$$I = 1{,}5492\ A$$

$$L_{diff} = \frac{d\phi}{di} = b \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{i}}$$

$$L_{diff} = b \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{I}}$$

$$= 12{,}05 \, mH$$

$$I_{gleich} = I$$

$$\frac{dq_1}{du_1} = C_{1diff} = 3 a_1 u^2$$

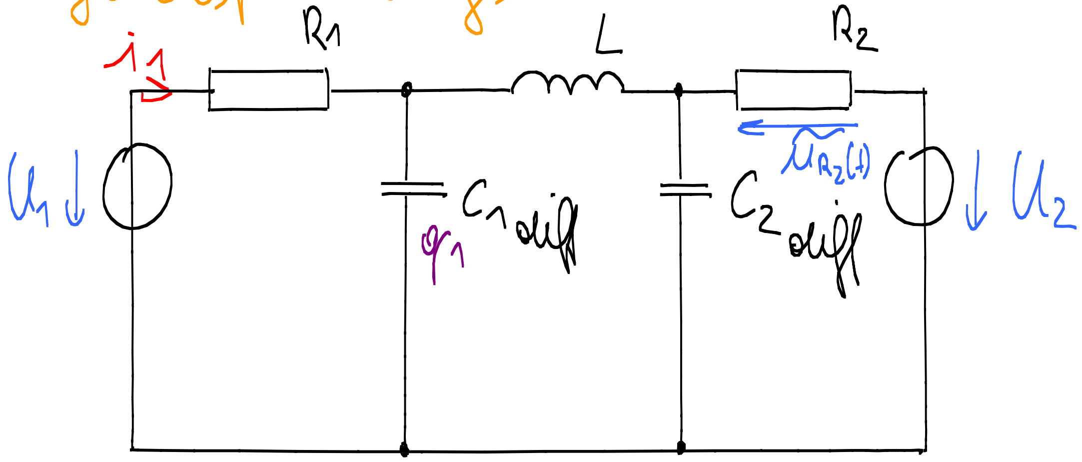
$$\left.\frac{dq_1}{du_1}\right|_{u_{gleich} = u_C} = \left. 3 a_1 u^2 \right|_{u_C} = 1{,}106 \, \mu F$$

$$\frac{dq_2}{du_2} = C_{2diff}$$

$$\left. C_{2diff} \right|_{u_{gleich}} = 2{,}212 \, \mu F$$

Kleinsignalbetrachtung:

(es werden rein die Kleinsignal Werte berücksichtigt die Gleichspannungsanteile kommen noch hinzu)



$R_1 = 3{,}0984\,\Omega \qquad C_{1\,diff} = 1{,}106\,\mu F$

$R_2 = 4{,}6976\,\Omega \qquad C_{2\,diff} = 2{,}212\,\mu F$

$L = 12{,}05\,mH$

$-jX_{C_1} ;\ X_{C_1} = 143{,}91\,\Omega$

$-jX_{C_2} ;\ X_{C_2} = 71{,}96\,\Omega$

$jX_L ;\ X_L = 75{,}72\,\Omega$

$\underline{U}_1 = 1\,mV \angle 0°$

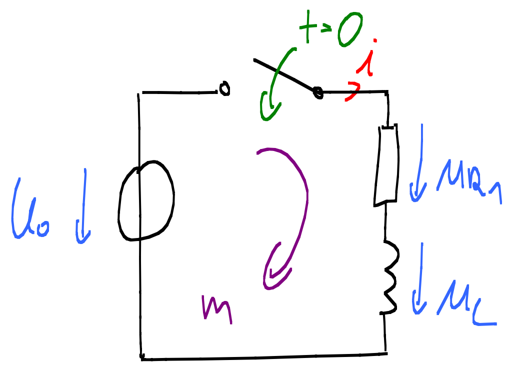
$\vdots$

$\underline{U}_{R_2} = R_1 \cdot \underline{I}_{R_2}$

$= -61{,}21\,\mu V \angle -89{,}08°$

$u_{R_2} = -61{,}21\,\mu V \cdot \cos(\omega t - 89{,}08°)$

Zeitschrittverfahren zur Lösung von DGL:



m: $u_{R1} + u_L = U_0$

$$iR_1 + Li' = U_0$$

$$i' + i\frac{R_1}{L} = \frac{U_0}{L}$$

$$i' + i\cdot\frac{1}{\tau} = \frac{U_0}{L}$$

$$\hookrightarrow \tau = \frac{L}{R_1}$$

$$i \begin{cases} i_h = ke^{-\frac{1}{\tau}t} \\ i_p = \frac{U_0}{R} \end{cases} \Bigg\} \; i = ke^{-\frac{1}{\tau}t} + \frac{U_0}{R}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Physik:} & i(0^+) = 0 \\ \text{DGL:} & i(0^+) = k + \frac{U_0}{R} \end{array}\right\} k + \frac{U_0}{R} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow k = -\frac{U_0}{R}$$

$$\Rightarrow i_{(t)} = \frac{U_0}{R}\left[1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}\right]$$

$R = 10\,\Omega$

$U_0 = 12\,V$

$L = 0{,}1\,H$

$h = 50\,ms$

Dies funktioniert für nicht lineare Bauteile nicht, daher das Zeitschrittverfahren:

$$i' = \frac{R}{L} i + \frac{U_0}{L} = \frac{di}{dt}$$

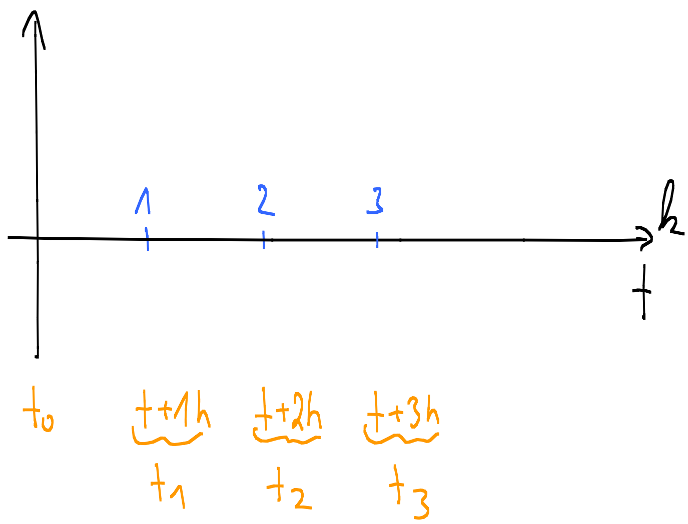
$$i' = Ai + Bu + g(t)$$ $u = U_0$ ... Quelle, $g(t) = 0$

$$i' = f(i, u, (t))$$ ... im allgemeinem

$$t_k = t_0 + h \cdot k$$ h ... Zeitschritt

$$i_k = i(t_k) = i(t_0 + hk)$$ ... Zustandsgröße

$$u_k = u(t_k) = u(t_0 + h \cdot k)$$ ... Quellgröße



Taylorreihe:

$k, k+1$: $$i_{k+1} = i(t_{k+1}) = i(t_k + h)$$

$$= i(t_k) + \left.\frac{di}{dt}\right|_{t_k} \cdot h + L \ldots$$ Rest vernachlässigbar

$$i_{k+1} \approx i_k + h \left.\frac{du}{dt}\right|_{t_k} \ldots$$ Euler Verfahren; Explizites Euler Verfahren (forward Euler)

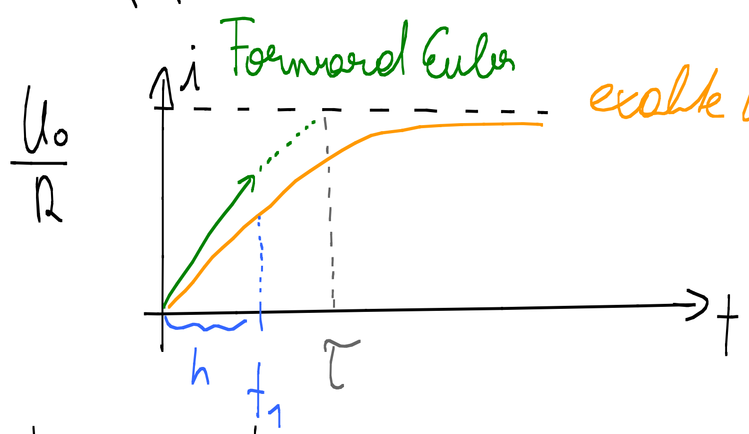
Beispiel:

$$i_{k+1} \approx i_k + h \left.\frac{di}{dt}\right|_{t_k} \qquad \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} i + \frac{U_0}{L}$$

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t_k} = -\frac{R}{L} i_k + \frac{U_0}{L}$$

$$i_{k+1} \approx i_k + h\left[-\frac{R}{L} i_k + \frac{U_0}{R}\right]$$

$$i_{k+1} = i_{k+1}(i_k, u_k, (t_k))$$



Dieses Verfahren liefert in der Regel zu große Werte; um dies zu minimieren kann man kleinere Schritte rechnen;

	i_{exakt}	$i_{Euler, forward}$
t_0	0	0
t_1	0,4722	0,6
t_2	0,7585	0,9

Implizites Euler Verfahren (backward Euler):

$$i_{k+1} \approx i_k + f(i_{k+1}, u_{k+1}, t_k)$$

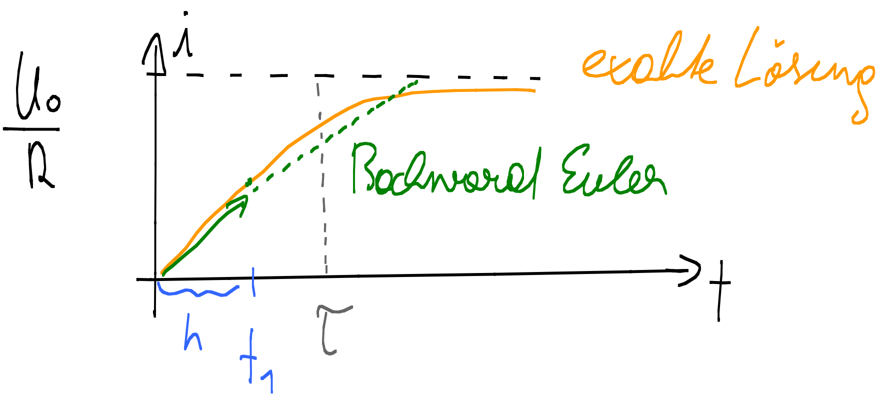
$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} i + \frac{U_0}{L}$$

$$i'\Big|_{t_{k+1}} = -\frac{R}{L} i_{k+1} + \frac{U_0}{L}$$

$$i_{k+1} \approx i_k + h\left[-\frac{R}{L} i_{k+1} + \frac{U_0}{L}\right]$$

$$i_{k+1}\left[1 + h\frac{R}{L}\right] = i_k + h\frac{U_0}{L}$$

$$i_{k+1} = i_k + h\frac{U_0}{L}$$



	i exakt	i Euler, Backward
t_0	0	0
t_1	0,4722	0,4
t_2	0,7585	0,667

Beide Verfahren liefern keine exakte Lösung; beide kombiniert nennt man Trapezregel
⇒ Runge-Kutta Formel

Prediktor - Korrektor Methode:

Prediktor: $i^*_{k+1} \approx i_k + h \cdot f(i_k, u_k, t_k)$

Korrektor: $i_{k+1} = i_k + h \cdot \frac{1}{2}[f(i_k, u_k, t_k) + f(i^*_{k+1}, u_{k+1}, t_k)]$

	i exakt	i Prediktor, Korrektor
t_0	0	0
t_1	0,4722	0,45
t_2	0,7585	0,7312

Diese Verfahren sind sehr stark abhängig von der Anzahl der Stützstellen; d.h. ev. nach der Simulation noch einmal mit dem Doppelten oder Zehnfachen der Stützstellen rechnen;

Dafür kann mit jeder Signalform (Sin, Δ, Rampe, ...) gearbeitet werden;

Sei L nicht linear $\Rightarrow$ $\underbrace{L(i) \text{ berechnen}}$ $\Rightarrow L(i_k)$

aus Kennlinie, Finite Elemente, ...

Sei R nicht linear $\Rightarrow$ $\overbrace{R(i) \text{ berechnen}}$ $\Rightarrow R(i_k)$

2 Bsp.: 1 Kleines zum Verständnis
1 großes zum Rechnen; 1-3 Bauteile;
Vergleich analytische vs. numerische Lösung
(Kutta, Jakobi, Euler, ...); Verfahrenswahl begründen