lin A

Note Title 09.01.2008

$(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ Gerade $y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$

$$\Rightarrow y = \tilde{P}_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

$L_0(x_0) = 1 \qquad L_0(x_1) = 0$
$L_1(x_0) = 0 \qquad L_1(x_1) = 1$

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1}) \cdot (x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}$$

$L_{n,k}(x_k) = 1$

$L_{n,k}(x_j) = 0 \qquad j \neq k$

$$P_n(x) = L_{n,0}(x)\, y_0 + L_{n,1}(x) \cdot y_1 + \dots + L_{n,n}(x)\, y_n$$

$$P_n(x_k) = 1 \cdot y_k$$

Interpolation und Polynomapproximation:

Beispiel

$f(x) = \frac{1}{x} \qquad x_0 = 2; \quad x_1 = 2{,}5 \quad x_2 = 4$

ges.: $P_2(x)$ mit $P_2(x_k) = f(x_k) \quad k = 0, 1, 2$

$$L_{2,0}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$= \frac{(x-2{,}5)(x-4)}{(2-2{,}5)(2-4)}$$

$$= x^2 - 6{,}5x + 10$$

$$L_{2,1}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$= \frac{(x-2)(x-4)}{(2{,}5-2)(2{,}5-4)}$$

$$= \frac{1}{3}(-4x^2 + 24x - 32)$$

$$L_{2,2} = \dots = \frac{1}{3}(x^2 - 4{,}5 + 5)$$

$$\Rightarrow P_2(x) = L_{2,0}(x) \cdot \underbrace{f(x_0)}_{\frac{1}{2}} + L_{2,1}(x) \cdot \underbrace{f(x_1)}_{\frac{1}{2{,}5}} + L_{2,2}(x) \cdot \underbrace{f_2(x)}_{\frac{1}{4}}$$

$$= 0{,}05x^2 - 0{,}425x + 1{,}15$$

$$f(3) = \frac{1}{3} \qquad P_2(3) = 0{,}325$$

über Taylorpolynom: $f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (x-1)^k$

$n = 2,\ x = 3:\quad f(3) \approx 1 - 2 + 4 = 3$

$n = 3 \qquad f(x) \approx 1 - 2 + 4 - 8 = -5$

$\Rightarrow$ Taylor weniger optimal

Spline Interpolation

Def: Sei $f \in C[a,b]$ und $\{x_i\}$ eine Menge von Knoten mit $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

Eine kubische Spline Interpretation (= kubischer Spline) von f ist eine Funktion mit folgenden Eigenschaften

⇒ siehe Skript seite 110

$n + 1 + 3(n-1) + 2 = 4n$ Bedingungen

⇒ $4n$ Unbestimmte a_k, b_k, c_k, d_k

⇒ großes Gleichungssystem

Skript S. 112: A ist eine Matrix bei der die Diagonalelemente größer sind als die Restlichen Elemente der Zeile
⇒ Matrix ist invertierbar

Beispiel:

$f(x) = \cos(x)$ auf $[0, 2\pi]$, $n = 6$

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 0 \\
x_1 &= \pi/3 \\
x_2 &= 2\pi/3 \\
&\vdots \\
x_6 &= 2\pi
\end{aligned}
$$

$$a_k = f(x_k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 1/2 & k = 1 \\ -1/2 & k = 2 \\ -1 & k = 3 \\ -1/2 & k = 4 \\ 1/2 & k = 5 \\ 1 & k = 6 \end{cases}$$