lineare Algebra

Note Title 12.12.2007

$A \in M(n \times n)$ EW = Nullstelle des Polynom

$P_n(\lambda) = \det(A - I\lambda) \overset{!}{=} 0$

$\approx$

$P_{20} = (\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-20)$ Nullstellen:

$= \lambda^{20} + 210\lambda^{19} + \ldots + 20!$

$\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = 2$
$\vdots$
$\lambda_{20} = 20$

P_{20} mit kleinem Fehler

$Q_{20}(\lambda)\ \lambda^{20} - [210 - 2^{-23}]\lambda^{19} + \ldots + 20!$

Die Nullstellen bis 10 bleiben, zwischen 10 und 20 gibt es plötzlich komplexe Nullstellen!

Eigenwerte: $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$
$\mu_1, \ldots, \mu_n$ l.u EW $\Big\}$ von $A \in M(n \times n)$

es gelte: $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \ldots \geq |\lambda_n|$

λ_1 heißt dominanter EW

$x_0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig und bilde

$x_1 = A \cdot x_0$

$x_2 = A \cdot x_1 = A \cdot A \cdot x_0 = A^2 \cdot x_0$

$\Rightarrow x_s = A^s \cdot x_0 \quad s \in \mathbb{N} \qquad x_s$ konv. gegen μ_s

$$x_0 = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n$$

(Linearkombination der Basisvektoren $|\alpha|$ $u_1, \ldots, u_n$)

$$x_s = A^s x_0 = A^s \cdot (\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n) \quad \alpha_i \in \mathbb{C}$$

$$A \alpha_1 u_1 = \alpha_1 \underbrace{A \cdot u_1}_{\lambda_1 u_1} = \alpha \lambda_1 u_1$$

$$A^2 \alpha_1 u_1 = \alpha_1 \lambda_1 \cdot \underbrace{A u_1}_{\lambda_1 u_1} = \alpha_1 \lambda_1^2 u_1$$

$$A^s \alpha_1 u_1 = \alpha_1 \lambda_1^s u_1$$

$$A^s \alpha_k u_k = \alpha_k \lambda_k^s u_k \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_s = \alpha_1 \cdot \lambda_1^s u_1 + \alpha_2 \lambda_2^s u_2 + \ldots + \alpha_n \lambda_n^s u_n \qquad \lambda_1 \neq 0$$

$$= \lambda_1^s \left[\alpha_1 u_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^s u_2 + \ldots + \alpha_n u_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^s \right]$$

$$z \in \mathbb{C} \qquad z = |z| \cdot e^{i\varphi}$$

$$\varphi = \arg(z)$$

$$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

$$\lambda_1 = |\lambda_1| \cdot e^{i\varphi_1} \qquad \varphi_1 = \arg(\lambda_1)$$

$$\vdots$$

$$\lambda_k = |\lambda_k| \cdot e^{i\varphi_k} \qquad \varphi_k = \arg(\lambda_k)$$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} \cdot \frac{e^{i\varphi_2}}{e^{i\varphi_1}} = \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} \cdot e^{i(\varphi_2-\varphi_1)}$$

$$= \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^s \underbrace{e^{is(\varphi_2-\varphi_1)}}_{\underbrace{\cos(s(\varphi_2-\varphi_1))+i\sin(s(\varphi_2-\varphi_1))}_{\text{beschränkt}}}$$

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \Rightarrow \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} < 1 \Rightarrow \left(\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}\right)^s \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$$

$$x_s \xrightarrow[s\to\infty]{} \lambda_1^s \alpha_1 u_1 \qquad x_s \approx \beta \cdot u_1$$

$$x_{s+1} = \lambda_1 \cdot \lambda_1^s \alpha_1 \cdot u_1 = \lambda_1 \cdot x_s$$

$$\langle x_{s+1}, x_s \rangle = \langle \lambda_1 \cdot s_s, x_s \rangle = \lambda_1 \underbrace{\langle x_s, x_s \rangle}_{\|x_s\|^2 \neq 0}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \approx \frac{\langle x_{s+1}, x_s \rangle}{\langle x_s, x_s \rangle} = \mu_s$$

Rayleigh-Quotient

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = A \cdot x_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = A \cdot x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = A \cdot x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$x_4 = \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$x_5 = \begin{pmatrix} 21 \\ 22 \end{pmatrix}$$

$$x_6 = \begin{pmatrix} 43 \\ 42 \end{pmatrix}$$

$$\mu_1 = \frac{\langle x_2, x_1 \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \frac{7}{5} = \frac{14}{10} = 1{,}4$$

$$\mu_2 = 2{,}08$$

$$\mu_3 \approx 1{,}89$$

$$\mu_7 \approx 1{,}99$$

Exakt $\lambda_1 = 2$

$\lambda_2 = -1$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} = 4x_0 \qquad x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \end{pmatrix} = 4x_1 \qquad x_4 = \begin{pmatrix} 16 \\ -16 \end{pmatrix} = 16x_0$$

keine Konvergenz erkennbar

EW von A: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = 0$

$\lambda_1 = 2$

$\lambda_2 = -2$

$|\lambda_1| = |\lambda_2|$

Um die Potenzmethode sinnvoll anwenden zu können muss

$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots |\lambda_n|$ gelten

echt größer!