lineare Algebra

Note Title 05.12.2007

Jacobi - Iteration

$A \cdot x = b, \quad A = S - T$

$$\left.\begin{aligned} Sx &= Tx + b \\ Sx_{k+1} &= Tx_k + b \end{aligned}\right\} -$$

$$S(x - x_{k+1}) = T(x - x_k)$$

$v_k = x - x_k$ ... Fehlervektor

$$Sv_{k+1} = Tv_k$$

$$Sv_{k+1} = Tv_k \qquad Sv_k = Tv_{k-1}$$

$$v_{k+1} = S^{-1} \cdot T \cdot v_k =$$

$$= S^{-1}T(S^{-1}T \cdot v_{k-1})$$

$$= S^{-1}T(S^{-1}T(S^{-1}Tv_{k-2}))$$

$$= \ldots = (S^{-1}T)^k v_0$$

$$(S^{-1}T)^k = C \cdot D^k \cdot C^{-1}$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \lambda_i \ldots \text{EW von } S^{-1}T$$

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

$$= (C \cdot D^k \cdot C^{-1})\, v_0$$

$$|\lambda_i| < 1 \qquad \underset{\text{für } k \to \infty}{\lambda_i^k \to 0} \iff \underset{\text{für } k \to \infty}{v_k \to 0}$$

$$x_k \to x \qquad x \ldots \text{Lösung von } A \cdot x = b$$

Bsp zur Jakobi Iteration aus Skript: S.87

$$S^{-1} T = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}; \quad EW = \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 \\ 1/2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Ergebnis stimmt ab der 19 Iteration (siehe Skript)

$$= \lambda^2 - \frac{1}{4} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\rho = \max\left\{ \left|\frac{1}{2}\right|, \left|-\frac{1}{2}\right| \right\} = \frac{1}{2} < 1$$

Jakobi: $r = -\log_{10}(\rho)$

konv. Geschwindigkeit $= -\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) = \log(2) = 0{,}3010$

Gauss-Seidl: $r = -\log_{10}(\rho)$

$$= -\log_{10}\left(\frac{1}{4}\right) = 2\log(2) = 0{,}6020$$

Gauß-Seidl-Iteration

Eine Verbesserung der Jakobi Iteration;
im K+1 Schritt wird bereits das
Ergebnis des K Schritt verwendet;
⇒ konvergiert schneller gegen Lösung

⇒ Aufgrund der Konvertierungsgeschwindigkeit
ist die Gauss-Seidl Iteration zu empfehlen;

Im obigen Bsp. benötigt Jakobi 19 Schritte,
Gauss-Seidl 10;
dies passt auch gut auf den r-Wert
des Bsp.

Achtung: Vor Beginn der Iteration ist
zu prüfen ob die Lösung
konvergiert $\Leftrightarrow \forall |EW(S^{-1}T)| < 1$

Def: Eine symetrische Matrix $\in M(n \times n)$ heißt
positiv definit genau dann, wenn
folgendes gilt:

1.) $x^T A x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$

$\forall \in \mathbb{R}^n$ ev. Problematisch

2.) alle Eigenwerte λ_i von A sind
größer als 0

3.) alle Hauptminore von $A > 0$

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{nn} \end{matrix}$$

$$A_1 = \det(a_{11})$$

$$A_2 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \ldots$$

$$\Rightarrow A_1, A_2, \ldots, A_n = \det A$$

4.) Umformbar auf oben $\triangle$ Matrix ohne Zeilenvertauschung!

Satz Sei $A \in M(n \times n)$ pos. definit, dann konv. die Gauss Seidl Iteration

Def.: Matrix $\in (n \times n)$ heißt streng diagonal dominant wenn:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

$$|a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}| \cdots$$

Bemerkung: Ist Matrix A streng diagonal dominant $\exists A^{-1}$

Satz: Gauss-Seidl konv. für streng diagonal dominante