lineare Algebra

Note Title 14.11.2007

Skalarprodukt

$s: V \times W \to \mathbb{K}$

$(v, w) \mapsto s(v, w)$ heißt skalarprodukt

es muss gelten:

1.) $s(v,v) > 0$ falls $v \neq 0$ d.h. $v \in \mathbb{R}$

2.) $s(v,w) = \overline{s(w,v)}$ ist nicht kommutativ

3.) $s(\lambda v, w) = \lambda s(v,w)$

4.) $s(u+v, w) = s(u,w) + s(v,w)$

$\langle s, w \rangle$ statt $s(v,w)$ als Schreibweise

Raum in dem Skalarprodukt definiert ist heißt unitärer Raum;

Folgerung:

1.) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $s(v,w) = s(w,v)$

2.) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $s(v, \lambda w) = \overline{\lambda} s(v,w)$

3.) $v = 0$ oder $w = 0$ $\Rightarrow$ $s(v,w) = 0$

4.) $v = 0$ $\Leftrightarrow$ $s(v,v) = 0$

$$\langle v, \lambda \cdot w \rangle = \overline{\langle \lambda w, v \rangle} = \bar{\lambda} \overline{\langle w, v \rangle}$$

$$\langle v, w \rangle = 0 \quad \not\Rightarrow \quad v = 0 \text{ oder } w = 0$$

Beispiel:

$\mathbb{R}^2$: $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$;

$$\langle v, w \rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$$

aber auch: $\langle v, w \rangle := 2 x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2$

Beispiel:

$\mathbb{R}^n$: $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$,

$$\langle v, w \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$\mathbb{C}^n$: $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \overline{y_i}$

Beispiel:

$\mathbb{P}_2$: $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$

$g(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$

$$\langle f, g \rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$V = \mathcal{C}[a, b]$; $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$

stetige Funktionen

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(t) \cdot g(t) \, dt$$

Beispiel:

$V: \mathcal{C}[0,1]$

$f(t) = t$

$g(t) = 1 - t + t^2$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 t \cdot (1 - t + t^2)\, dt = \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{5}{12}$$

$$\langle f, f \rangle = \int_0^1 t \cdot t\, dt = \frac{t^3}{3} = \frac{1}{3}$$

$z = \alpha + j\beta$

$\bar{z} = \alpha - j\beta$

$|z|^2 = \alpha^2 + \beta^2 = z \cdot \bar{z}$

Satz: Sei V ein unitärer Vektorraum, dann gilt für alle $v, w \in V$ die Schwarz'sche Ungleichung:

$$|\langle v, w \rangle|^2 = \langle v, w \rangle \cdot \overline{\langle v, w \rangle} \leq \langle v, v \rangle \cdot \langle w, w \rangle$$

Beweis: 1. Fall: $w = 0$ $\quad \underbrace{|\langle v, 0 \rangle|^2}_{0} \leq \langle v, v \rangle \cdot \underbrace{\langle 0, 0 \rangle}_{0}$ ✓

2. Fall $w \neq 0$:

$$0 \leq \langle v - \lambda w, v - \lambda w \rangle$$

$$= \langle v, v \rangle - \langle v, \lambda w \rangle - \langle \lambda w, v \rangle + \langle \lambda w, \lambda w \rangle$$

$$= \langle v, v \rangle - \bar{\lambda} \langle v, w \rangle - \lambda \overline{\langle v, w \rangle} + \lambda \bar{\lambda} \langle w, w \rangle$$

wähle: $\lambda = \frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}$; $\bar{\lambda} = \frac{\overline{\langle v,w\rangle}}{\langle w,w\rangle}$

$$= \langle v,v\rangle - \frac{\overline{\langle v,w\rangle}}{\langle w,w\rangle}\cdot\langle v,w\rangle - \cancel{\frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}\cdot\overline{\langle v,w\rangle}}$$

$$+ \frac{\langle v,w\rangle}{\cancel{\langle w,w\rangle}}\cdot\frac{\overline{\langle v,w\rangle}}{\langle w,w\rangle}\cdot\cancel{\langle w,w\rangle}$$

$$0 \leq \langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle\cdot\overline{\langle v,w\rangle}$$

$$\langle v,w\rangle\overline{\langle v,w\rangle} \leq \langle v,v\rangle\cdot\langle w,w\rangle$$

=

Eigenschaften einer Norm auf $V \to \mathbb{R}$

N1.) $\|v\| \geq 0$

N2.) $\|\lambda\cdot v\|^2 = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \lambda\bar{\lambda}\langle v,v\rangle$

$$= |\lambda|^2\,\|v\|^2$$

$$\Rightarrow \|\lambda v\| = |\lambda|\cdot\|v\| \checkmark$$

N3.) $\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle$

$$= \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle$$

$$= \underbrace{\langle v,v\rangle}_{\|v\|^2} + \underbrace{\langle v,w\rangle + \overline{\langle v,w\rangle}}_{2\,\mathrm{Re}\langle v,w\rangle \leq 2|\langle v,w\rangle|} + \underbrace{\langle w,w\rangle}_{\|w\|^2}$$

$$\leq \|v\|^2 + 2\|v\|\cdot\|w\| + \|w\|^2$$

$$= (\|v\| + \|w\|)^2$$

Def: Sei V ein reeller unitärer Raum und $v, w \in V \setminus \{0\}$.
Als Winkel von v und w; $\angle(v,w)$

Winkel zwischen v und w

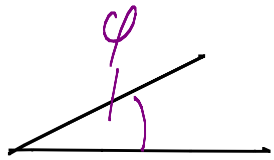
erklären wir die reellen Zahlen;

$$\varphi = \angle(v,w) := \arccos \frac{\langle v,w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}, \quad 0 \le \varphi \le \pi$$

Für $v = 0$ oder $w = 0$ wird $\angle(v,w)$ nicht definiert;

$$0 \le |\langle v,w \rangle|^{\cancel{2}} \le \|v\|^{\cancel{2}} \cdot \|w\|^{\cancel{2}}$$

$$0 \le \frac{\langle v,w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \le 1$$



Eigenschaften:

1.) $\measuredangle \langle v,w \rangle = \measuredangle(w,v)$

2.) $\measuredangle(v,w) = 0 \Rightarrow v = \lambda \cdot w \quad \lambda \in \mathbb{R}$

3.) $\measuredangle \langle v,w \rangle = 0 \Rightarrow v, w$ sind orthogonal

$\measuredangle(v,w) = \frac{\pi}{2}$ 90°