Lineare Algebra

Note Title 17.10.2007

Bsp.:

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \end{aligned}$$

$$A = P^T L \cdot R$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot (-2)$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot (-1)$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = R \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot x = b$$

$$\underbrace{P \cdot P^T}_{I} \cdot L \cdot R = P \cdot b$$

$$L \cdot \underbrace{R \cdot x}_{y} = \underbrace{P \cdot b}_{b'}$$

$L \cdot y = b'$

$R \cdot x = y$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad b' = P \cdot b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 5 \qquad & y_1 &= 5 \\ 2y_1 + y_2 &= 2 \qquad & y_2 &= -8 \\ y_2 + y_3 &= 1 \qquad & y_3 &= 9 \end{aligned}$$

$R \cdot x = y$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ x_2 + 4x_3 &= -8 \\ -5x_3 &= 9 \end{aligned}$$

$$x_3 = -\frac{9}{5}$$

$$x_2 = -8 - 4 \cdot \left(-\frac{9}{5}\right) = -\frac{4}{5}$$

$$x_1 = 5 + \frac{4}{5} + \left(-\frac{9}{5}\right) = 4$$

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ -4/5 \\ -9/5 \end{pmatrix}$$

Anzahl der Rechenschritte für $n \times n$ GLS-System

Gaußscher Algorithmus $= \frac{n^3 - n}{3}$

$L \cdot R$ Zerlegung $= \frac{n^3 - n}{3} + n^2$

L·R - Dauert offensichtlich länger, aber die linke Seite ist wiederverwendbar, was in der Regel häufig vorkommt:

$$A \cdot x = b$$
$$A \cdot x = \tilde{b}$$
$$A \cdot x = \hat{b}$$

Determinanten:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

für 3x3:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$\det = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

für 4x4

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} & \cancel{a_{24}} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & \cancel{a_{42}} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = A_{22}'$$

Satz: $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot A'_{ij} \qquad i = 1, \dots, n$

eine Zeile/Spalte streichen; der Rest ist eine Matrix mit der multipliziert

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 6 \end{vmatrix}}_{\det} + (-1) \cdot 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}}_{\det} + 1 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}}_{\det} = 100$$

—

Dreiecksmatrix (obere):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{34} \\ 0 & 0 & & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots 0 \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn} \quad \text{(Produkt der Diagonale)}$$

$$\Rightarrow \det I = 1$$

Satz: durch elementare Umformungen

- A' aus A durch vertauschen 2er Zeilen / Spalten

  $$\det(A') = (-1)\det(A)$$

- A' aus $A \cdot \lambda$

  $$\det(A') = \lambda \cdot \det(A)$$

⋮

siehe S. 23