Lineare Algebra

Note Title 03.10.2007

Lineare Gleichungssysteme – Gausscher Algorithmus:

Einführung:

Beispiel:

$$\left.\begin{aligned} 2u - 3v + w &= -1 \\ -2u + 4v - 2w &= 0 \\ 4u \phantom{{}-3v} - w &= 1 \end{aligned}\right\}$$

sind linear, da kein ^{2}, ln, ...

lösen durch schrittweise Elimination:

$$\Rightarrow \begin{aligned} 2u - 3v + w &= -1 \\ v - w &= -1 \\ 6v - 3w &= 3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} 2u - 3v + w &= 1 \\ v - w &= -1 \\ 3w &= 9 \Rightarrow w = 3 \\ v - 3 &= -1 \Rightarrow v = 2 \\ 2u - 3 \cdot 2 + 3 &= -1 \\ 2u - 3 &= -1 \Rightarrow u = 1 \end{aligned}$$

sehr aufwendig; ⇒ nur Faktoren anschreiben

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & -3 & 1 & -1 & \\ -2 & 4 & -2 & 0 & +1 \\ 4 & 0 & -1 & 1 & (-2) \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & -3 & 3 \\ \hline \boxed{2} & -3 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 9 \end{array}$$

Stehen an dieser Stelle immer $\neq 0$ (Pivot) ist das GLS lösbar

Es sind n Gleichungen für n Unbekannte;

$P = \frac{n^3}{3}$ Rechenschritte notwendig

$\Rightarrow$ Verwendung von Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$ Spaltenmatrix

$$B = (b_{11}, b_{12}, \dots b_{1n})$$ Zeilenmatrix

$$C = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & \boxed{a_{33}} \end{pmatrix}$$ Quadratische Matrize

Diagonale

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$ Diagonalmatrix

$$E = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 \quad \cdots & a_{3n} \end{pmatrix}$$ obere Dreiecksmatrix

Rechenopperationen:

- $A, B \in M(m \times n)$ heißen gleich falls

  $a_{ij} = b_{ij} \quad \forall \quad 1 < i < m, \ 1 < j < m$

- $A, B \in M(m \times n)$ Addition:

  $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$

  Gliedweise addieren

- $-A := (-a_{ij})$ die zu A negative Matrix
- $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ - Nullmatrix

- $A + 0 = A$
  $0 + A = A$

- $A, B \in M(m \times n)$ Subtraktion

  $A - B := A + (-B)$

- $A, B \in M(m \times n)$, $\lambda \in K$ Skalarmultiplikation

  $\lambda \cdot A := \lambda \cdot a_{ij}$

Rechengesetze für Matrizen:

1.) $A + B = B + A$
2.) $(A + B) + C = A + (B + C)$
3.) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$
4.) $(\lambda \cdot \mu) A = \lambda (\mu \cdot A)$

5.) $\lambda(A+B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$

6.) $(-1) \cdot A = -A$

7.) $\lambda \cdot 0 = 0$

Beispiele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix} \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+u & 2+v \\ 3+x & -4+y \end{pmatrix} = B + A$$

$$2A - 3B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3u & 3v \\ 3x & 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3u & 4-3v \\ 6-3x & -8-3y \end{pmatrix}$$

1.) $A \in M(1 \times n)$, $B \in M(n \times 1)$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot (b_1, \dots, b_n) = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$$

2.) $A \in M(n \times m)$, $B \in M(m \times r)$

$$C = A \cdot B = c_{ij} \in M(m \times r)$$

mit: $c_{ik} = a_{i1} b_{1k} + \dots + a_{in} b_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot b_{jk}$