Lineare Algebra KV

Note Title 17.10.2007

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{rang}(A) = ?$$

$(\cdot -1)$ + (-2) +

vertauschen

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$ $(+1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

+

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{rang}(A) = 4$$

da es 4 Zeilen gibt die $\neq 0$ sind

2.) Beispiel

$A \cdot x = 0$

$$\begin{pmatrix} 1-t & 2 & -3 \\ 2 & 1-t & -6 \\ -4 & 4 & 6-t \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R} : \vec{x} \neq 0$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 4 & 6-t \\ 2 & 1-t & -6 \\ 1-t & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \cdot\frac{1}{2} \quad \frac{1-t}{4}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & 6-t \\ 0 & 3-t & -3-t/2 \\ 0 & 3-t & -3+1/4\,(1-t)(6-t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & 6-t \\ 0 & 3-t & -3-t/2 \\ 0 & 0 & -\cancel{3}+1/4\,(1-t)(6-t)+\cancel{3}+t/2 \end{pmatrix}$$

→ Damit es eine nicht triviale Lösung gibt muss das letzte Element $\neq 0$ sein

$$1/4 \cdot (1-t)(6-t) + t/2 \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{1}{4}\left(6-6t-t+t^2\right) + t/2 \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{t^2}{4} - \frac{5t}{4} + \frac{6}{4} \overset{!}{=} 0$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}{2 \cdot 1}$$

$$t_1 = 2$$

$$t_2 = 3$$

$$x \neq 0 \iff t=2 \text{ oder } t=3$$

3.) Beispiel:

$A \cdot x = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 6 & -5 \\ 2 & 1 & 8 & -7 \end{pmatrix}$$

für welche $b \in \mathbb{R}^4$ existiert eine Lösung?

$$(A,b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & b_1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & b_2 \\ -1 & 1 & 6 & -5 & b_3 \\ 2 & 1 & 8 & -7 & b_4 \end{array}\right)$$

(-2) $(+1)$ $(\cdot 2)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & b_1 \\ 0 & -1 & -4 & 3 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 2 & 8 & -6 & b_3 + b_1 \\ 0 & 3 & 12 & -9 & b_4 + 2b_1 \end{array}\right)$$

$\cdot 2$ $\cdot 1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & b_1 \\ 0 & -1 & -4 & 3 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - 3b_1 + 2b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 - 4b_1 + 3b_2 \end{array}\right)$$

$\mathrm{rang}(A) = 2 \Rightarrow \mathrm{rang}(b) \overset{!}{=} 2$ für Lösbarkeit

$$\Rightarrow \begin{aligned} b_3 - 3b_1 + 2b_2 &\overset{!}{=} 0 \qquad && b_3 = 3b_1 - 2b_2 \\ b_4 - 4b_1 + 3b_2 &\overset{!}{=} 0 && b_4 = 4b_1 + 3b_2 \end{aligned}$$

Da die Matrix nicht voll ist, d.h. rang(A) $\neq n$ ist das GLS nicht eindeutig lösbar;

$x_3 = s$

$x_4 = t$

$$x_2 = -4s + 3t - b_2 + 2b_1$$

$$x_1 = b_1 + t - 2s + 4s - 3t + b_2 - 2b_1$$

$$= -b_1 + b_2 + 2s - 2t$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} b_1 + b_2 + 2s - 2t \\ 2b_1 - b_2 - 4s + 3t \\ s \\ t \end{pmatrix} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$$