Differentialgleichungen 4. Hausübung

Allinger Harald 0630936

Note Title 21.05.2008

7. Die zur inhomogenen Dgl. mit variablen Koeffizienten

$$xy'' + (2x-3)y' + (x-3)y = x^4 e^{-x}$$

zugehörige homogene Dgl. hat eine partikuläre Lösung

$$y_1 = e^{-x}.$$

Man bestimme damit zunächst die allgemeine Lösung der homogenen Dgl. und weiters die Lösung der Ausgangsgleichung.

$$xy'' + (2x-3)y' + (x-3)y = x^4 e^{-x} \quad / \cdot x^{-1}$$

$$\Downarrow$$

$$y'' + \left(2 - \frac{3}{x}\right)y' + \left(1 - \frac{3}{x}\right)y = x^3 e^{-x} \qquad x \neq 0$$

Lösen der homogenen Dgl:

$$y'' + \underbrace{\left(2 - \frac{3}{x}\right)}_{a}y' + \underbrace{\left(1 - \frac{3}{x}\right)}_{b}y = 0$$

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 y_2(x)$$

$$y_2 = y_1(x) \int \frac{e^{-\int a(x)\,dx}}{y_1^2(x)}\,dx$$

$$= e^{-x} \int \frac{e^{-\int \left(2 - \frac{3}{x}\right)dx}}{e^{-2x}}\,dx$$

$$= e^{-x} \cdot \int \frac{e^{-2x + 3\ln|x|}}{e^{-2x}}\,dx$$

$$= e^{-x} \cdot \int \frac{\cancel{e^{-2x}} \cdot x^3}{\cancel{e^{-2x}}} \, dx$$

$$= e^{-x} \cdot \frac{x^4}{4}$$

$$y_h = c_1 \underbrace{e^{-x}}_{y_1(x)} + c_2 \underbrace{e^{-x} \cdot \frac{x^4}{4}}_{y_2(x)}$$

P.) Lösen der Dgl. mittels variation der Konstanten

$$c_1' = -\frac{y_2(x) \, f(x)}{W(y_1, y_2)(x)} \qquad c_2' = \frac{y_1(x) \, f(x)}{W(y_1, y_2)(x)}$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-x} \frac{x^4}{4} \\ -x e^{-x} & e^{-x} \cdot x^3 + \frac{x^4}{4} \cdot (-x) e^{-x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{-x} \cdot \left(e^{-x} \cdot x^3 - \frac{x^5}{4} e^{-x} \right) + x e^{-x} \cdot e^{-x} \frac{x^4}{4}$$

$$= e^{-2x} \left(x^3 - \cancel{\frac{x^5}{4}} \right) + e^{-2x} \cancel{\frac{x^5}{4}}$$

$$= e^{-2x} x^3$$

$$c_1' = -\frac{e^{-x} \frac{x^4}{4} \cdot x^3 e^{-x}}{e^{-2x} x^3} = \frac{\cancel{e^{-2x}} \cdot \frac{x^4}{4} \cancel{x^3}}{\cancel{e^{-2x}} \cancel{x^3}} = \frac{x^4}{4}$$

$$c_1 = -\int \frac{x^4}{4} \, dx = -\frac{x^5}{20}$$

$$c_2' = \frac{\cancel{e^{-x}} \cdot \cancel{x^3}\, \cancel{e^{-x}}}{\cancel{e^{-2x}}\, \cancel{x^3}} = 1$$

$$c_2 = \int 1 \, dx = x$$

$$y_p = -\frac{x^5}{20} \cdot e^{-x} + x\, e^{-x} \frac{x^4}{4}$$

$$= \frac{x^5}{4} e^{-x} \left[1 - \frac{1}{5}\right]$$

A.) allgemeine Lösung:

$$y_{allgemein} = y_h + y_p$$

$$= c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{4} e^{-x} \left[1 - \frac{1}{5}\right]$$

$$= e^{-x} \left[c_1 + c_2 \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right]$$

8. Gesucht ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$xy'' - 3y' + \frac{4}{x}y = 2x \ln x$$

(für $x > 0$).

$$xy'' - 3y' + \frac{4}{x}y = 2x\ln(x) \quad | \cdot x$$

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 2\ln(x)x^2$$

Lösen als Euler Dgl:

subst: $x = e^t \qquad t = \ln(x)$

$$y(x) = z(t)$$
$$x\,y'(x) = z'(t)$$
$$x^2\,y''(x) = (z''(t) - z'(t))$$

$$(z'' - z') - 3z' + 4z = 2te^{2t}$$

$$z'' - 4z' + 4z = 2te^{2t}$$

H.) $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \longrightarrow$ innere Resonanz

$$y_h = c_1\underbrace{e^{2t}}_{y_1(x)} + c_2\underbrace{e^{2t}}_{y_2(x)}\cdot t$$

P.) Lösen des partikulären Anteils mittel Variation der Konstanten:

$$c_1' = \frac{-y_2(x)\, f(x)}{W(y_1,y_2)(x)} \qquad c_2 = \frac{y_1\, f(x)}{W(y_1,y_2)(x)}$$

$$W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 2e^{2t} & e^{2t} + t \cdot 2e^{2t} \end{vmatrix}$$

$$= e^{2t}\, e^{2t}[1+2t] - e^{2t} \cdot e^{2t}t\,2$$

$$= e^{4t}$$

$$c_1' = -\frac{e^{2t}t \cdot 2te^{2t}}{e^{4t}} = -\frac{2t^2 \cancel{e^{4t}}}{\cancel{e^{4t}}}$$

$$c_1 = -\int 2t^2\, dt = -\frac{2}{3}t^3$$

$$c_2' = \frac{e^{2t}\, 2te^{2t}}{e^{4t}} = 2t$$

$$c_2 = \int 2t\, dt = t^2$$

$$y_p = -\frac{2}{3}t^3 \cdot e^{2t} + t^2 \cdot t\, e^{2t}$$

$$= e^{2t}t^3\frac{1}{3}$$

A.) $y_{allgemein} = y_h + y_p$

$$= c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t}t + e^{2t}t^3\frac{1}{3}$$

$$= e^{2t}\left[c_1 + c_2 t + t^3 \frac{1}{3}\right]$$

/Rücksubst: $t = \ln(x)$

$x = e^t$

$$y_{allgemein} = e^{2\ln(x)}\left[c_1 + c_2 \ln(x) + \ln(x)^3 \frac{1}{3}\right]$$

$$= x^2 \left[c_1 + c_2 \ln(x) + \ln(x)^3 \cdot \frac{1}{3}\right]$$