Reduktion der Ordnung

Beispiel:

$$y'' - 3y' + 2y = e^x$$

H.) $y'' - 3y' + 2y = 0$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{9-8}}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \end{array}\right\} y_h = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 e^x$$

$$y_1(x) = e^{1x}$$
$$y_2(x) = e^{2x}$$

$$y_1(x) = e^x$$
$$y'(x) = e^x$$

$$z' + z\left(\frac{2y_1' + a(x)y_1}{y_1}\right) = \frac{f(x)}{y_1}$$

$$z' + z\left(\frac{2e^x - 3e^x}{e^x}\right) = \frac{e^x}{e^x}$$

$$z' - z = 1 \Rightarrow z' = z + 1$$

$$\frac{dz}{1+z} = dx \quad \Rightarrow \quad \ln|1+z| = x + \ln(c)$$

$$v' = z = Ce^{x} - 1 \quad \Leftarrow \quad 1+z = ce^{x}$$

$$v = Ce^{x} - x + D$$

eine partielle Lösung: $c = D = 0 \quad v = -x$

$$\Rightarrow y_p(x) = -xe^{x}$$

3.) allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} - xe^{x}$$

$$y'' + ay' + by = Q e^{mx}$$ partikuläre Lösung der inhomogenen Gl.

$$\left.\begin{aligned} y_p(x) &= Ae^{mx} \\ y_p'(x) &= Ame^{mx} \\ y_p''(x) &= Am^2e^{mx} \end{aligned}\right\} Ae^{mx}\underbrace{(m^2 + am + b)}_{p(m)} = Qe^{mx}$$

aus 1.) $y'' + ay' + by = 0 \qquad y = e^{\lambda x}$

$$e^{\lambda x}\underbrace{(\lambda^2 + a\lambda + b)}_{p(\lambda)} = 0$$

$$\Rightarrow A = \frac{Q}{p(m)}$$

$$p(\lambda) = \lambda - 3\lambda + 2$$

$$p(m) = 1 - 3 + 2 = 0 \Rightarrow m = 1 = \lambda$$

$\Rightarrow$ die Störfunktion $f(x)$ ist Lösung der homogenen Gleichung: man nennt dies "äußere Resonanz"

Lösen über Ansatz:

$$y_p(x) = A x e^{mx}$$
$$y_p'(x) = A e^{mx} + A x m e^{mx} = A e^{mx}(1+xm)$$
$$y_p''(x) = A m e^{mx}(1+xm) + A e^{mx} m = A e^{mx}(2m + xm^2)$$

$$\hookrightarrow A e^{\cancel{mx}}\left[\underbrace{2m + xm^2 + a(1+xm) + bx}_{x\underbrace{(m^2+am+b)}_{p(m)=0} + \underbrace{2m+a}_{p'(m)}}\right] = a e^{\cancel{mx}}$$

$$\Rightarrow A = \frac{a}{p'(m)} \cdot x e^{mx} \quad \text{(für den Ansatz } p(m)=0\text{)}$$

$$= -x e^{x}$$

Gibt es const. Koeffizienten, muss nicht der Umweg über die Reduktion der Ordnung genommen werden, sondern direkt der Ansatz gewählt werden.

Wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = m$ spricht man von

äußerer + innerer Resonanz

Erweiterung des Ansatzes:

$$y_p(x) = A x^2 e^{mx}$$
$$y_p'(x) = A 2x e^{mx} + A x^2 m e^{mx} = A e^{mx}[m x^2 + 2x]$$
$$\underbrace{y_p''(x)} = A m e^{mx}(m x^2 + 2x) + A e^{mx}(2mx + 2)$$

$$\hookrightarrow A \cancel{e^{mx}}[m^2 x^2 + mx + 2 + a(m x^2 + 2x) + b x^2] = a\cancel{e^{mx}}$$

$$x^2 \underbrace{(m^2 + am + b)}_{p(m)=0} + 2x \underbrace{(2m + a)}_{p'(x)=0} + 2 = a$$

$$\Rightarrow A = \frac{a}{\underbrace{p''(m)}_{=2 \text{ für 2. Ordnung}}} \quad \Rightarrow y_p = \frac{a}{2} x^2 e^{mx}$$

Diese vereinfachten partikulären Lösungen funktionieren nur wenn $f(x) = \ldots e^{x} \ldots$;

es müssen nur die obigen Fälle unterschieden werden.

Beispiel:

$$y'' + 2y'' - 3y' = 4e^{2x}$$

H.) $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$

$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3}$

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = -3$

$y_h = c_1 e^{x} + c_2 e^{-3x}$

P.) $a = 4$

$m = 2$

$p(m) = 4 + 4 - 3 = 5$

$A = \frac{4}{5} \Rightarrow y_p = \frac{4}{5} e^{2x}$

Beispiel.)

$$y'' - y = 2e^{x}$$

H.) $p(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1$

$y_h = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$

$p(1) = 0$

$p'(\lambda) = 2\lambda \Rightarrow p'(1) = 2$ $\qquad A = \frac{2}{2} = 1$

$y_p = x e^{x}$

$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + x e^{x}$