Dgl Vo

Note Title

Klausur: A - M : $15^{15} - 16^{15}$ Hs P1
M - Z : $16^{15} - 17^{15}$ Hs P1

26.05.2008

$\dot{x} = A x$ $\quad A \in M(n \times n)$ und const. $\quad A = (a_{ij})$ $\quad {i = 1 \dots n \atop j = 1 \dots n}$

ges.: $\Phi(t)$ FLM, die Lösungsraum aufspannt

$n = 1 \quad \dot{a} = a \cdot x \Rightarrow e^{at}$ als Lösung

$n > 1 \quad\quad e^{\lambda t} \cdot \vec{v} \quad \vec{v}$ ... Lösungsvektor

$$\dot{x} = \lambda e^{\lambda t} \cdot v = A e^{\lambda t} v \Rightarrow \underset{\neq 0}{e^{\lambda t}} \underbrace{(A - \lambda I) v}_{= 0} = 0$$

$$\underbrace{A \cdot v}_{\text{Bild}} = \lambda \cdot v$$

$$(A - \lambda I) v = 0$$

$$\Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0$$

Funktioniert nur, wenn λ ... Eigenwert
v ... Eigenvektor

n linear unabhängige Lösungsvektoren suchen / wenn linear unabhängige Eigenvektoren existieren

$$\Phi(t) = (\phi_1(t) \mid \phi_2(t) \mid \dots \mid \phi_n(t))$$

$$\det(A - \lambda I) = p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \dots (\lambda - \lambda_m)^{r_m}$$

$$r_1 + r_2 + \dots + r_m = n$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ... Eigenwerte $\quad r_1, \dots, r_m$ algebraische Vielfachheit

Satz:

$$\Phi(t) = \left(e^{\lambda_1 t} v_1,\ e^{\lambda_2 t} v_2, \ldots, e^{\lambda_n t} v_n\right)$$

Satz von A.L.J:

$$\underbrace{\det(\Phi(t))}_{\neq 0} = \underbrace{\det \Phi(t_0)}_{\neq 0} \exp \int_{t_0}^{t} Sp(A(s))\,ds$$

$$t_0 = 0 \Rightarrow \Phi(0) = \underbrace{(v_1, v_2, \ldots, v_n)}_{\text{linear unabhängig}}$$

geometrische Vielfachheit:

Dimension des Lösungsraumes: $(A - \lambda_i I) v_i = 0$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} : |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3}$$

$$\lambda_1 = 3$$

$$\lambda_2 = 1$$

$\lambda_1 = 3$ $\quad (A - \lambda_i I) v_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 = u_2$$

$$v_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 1 \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 = -u_2$

$v_2 = s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Lösungsdim $= 1$, da s frei wählbar

Beispiel:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad |A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda^2 = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 3$

$(A - \lambda_i I) = 0$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ } geometrische Vielfachheit $= 2$

Beispiel:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} : \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_2 = 0 \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

geometrische Vielfachheit $= 1$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad |A - \lambda_i I| = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= 7 \\ \lambda_2 &= -5 \end{aligned}$$

$\lambda_1 = 7$: $(A - \lambda_i I)\, v_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} -6 & 12 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_1 = 2u_2$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = -5$: $(A - \lambda_i I)\, v_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 = -2u_2$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\phi_1(t) = e^{7t}\, \vec{v_1}$$
$$\phi_2(t) = e^{-5t}\, \vec{v_2}$$

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2e^{7t} & -2e^{-5t} \\ e^{7t} & e^{-5t} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ allgemeiner Lösungsvektor:

$$\phi(t) = \Phi(t) \cdot c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

z.B.: bestimmen über AWP:

$$\phi(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = c_1 e^{7\cdot 0}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-5\cdot 0}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 2c_1 - 2c_2 &= 0 \\ c_1 + c_2 &= 2 \end{aligned}$$

$$\varphi(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 e^{7\cdot 1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-5\cdot 1}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2 = c_1 2 e^{7} - 2 c_2 e^{-5}$$

$$0 = c_1 e^{7} + c_2 e^{-5}$$

$$c_1 = \frac{e^{-7}}{2} \qquad c_2 = \frac{-e^{5}}{2}$$

$\dot{x} = A \cdot x$ angenommen A besitzt n linear unabhängige Eigenvektoren: $v_1, v_2, \dots, v_n$

$T = (v_1 | v_2 | \dots | v_n)$ reguläre Matrix, d.h.: $\exists\, T^{-1}$

Ähnlichkeitstransformation:

$$x = T \cdot y \Rightarrow \dot{x} = T \cdot \dot{y} = A \cdot x = A T y$$

$$\Rightarrow \dot{y} = \underbrace{T^{-1} A T}_{\text{Diagonalmatrix}} y = B \cdot y$$

$$B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$\dot{y} = B \cdot y$

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{y}_i = \lambda_i y_i \quad \Rightarrow y_i = e^{\lambda_i t}$$

ges.: FLM

$$\Phi(t) = T \cdot \psi(t)$$

$$= (v_1, \ldots, v_n) \cdot \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t})$$

$$= (e^{\lambda_1 t} v_1, e^{\lambda_2 t} v_2, \ldots, e^{\lambda_n t} v_n)$$