Dgl. Vo

Note Title 09.04.2008

Numerische Methoden:

$y' = f(x,y)$ Dgl. 1. Ordnung
↳ im allgemeinen nicht immer lösbar

Es ist immer ein AWP ($y(x_0) = y_0$) notwendig!

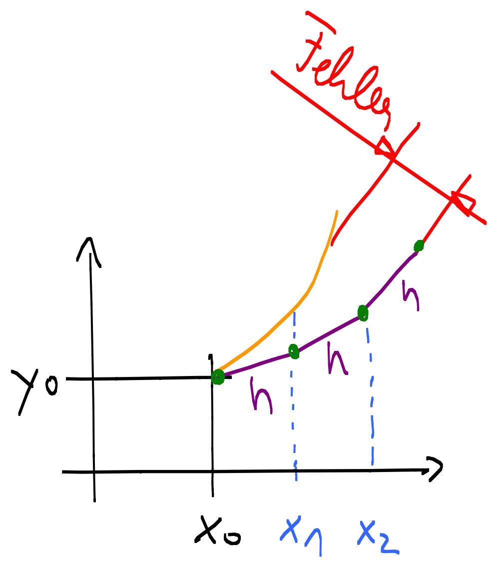
1.) Euler Methode:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$ def. laut Leibniz

Ansatz der Numerik

$$h \ll : \quad \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = f(x,y) \Rightarrow y(x+h) = y(x) + h f(x,y)$$

$$x_1 = x_0 + h \qquad \underbrace{y(x_1)}_{y_1} = \underbrace{y(x_0)}_{y_0} + h \cdot f(x_0, y(x_0))$$



$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

$f(x_0, y_0) = y_0'$

$f(x_1, y_1) = y_1'$

⋮

Die Tangentensteigung im Berechnungspunkt weicht von exakter Lösung ab ⇒ Fehler

Beispiel: $y' = y \qquad y(0) = 1$

$y = Ce^x \qquad y(0) = C = 1$

$y = e^x \qquad y(1) = ?$

wähle $h = 0{,}2$:

$y_0 = 1$

$y_1 = 1 + 0{,}2 \cdot 1 = 1{,}2$

$\vdots$

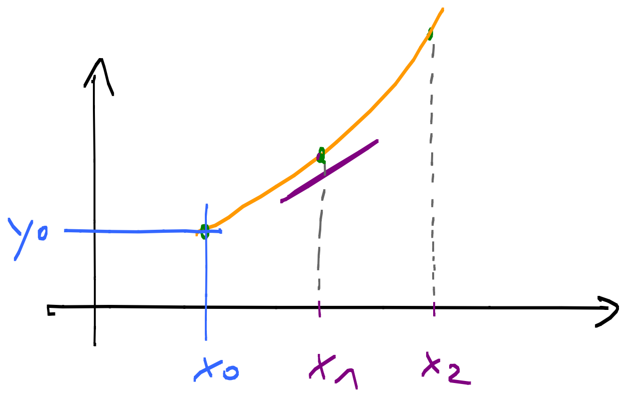
$y_5 = 1{,}2^5 = 2{,}488$

hoher Fehler! schon im Intervall [1, 2]

Verfeinerter Euler:

$y(x_0) = y_0$

$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) \qquad y_{n+2} = y_n + 2h \cdot f(x_{n+1}, y_{n+1})$



Es wird die Tangentensteigung im Wertepunkt dazwischen genommen

$\Rightarrow$ geringerer Fehler

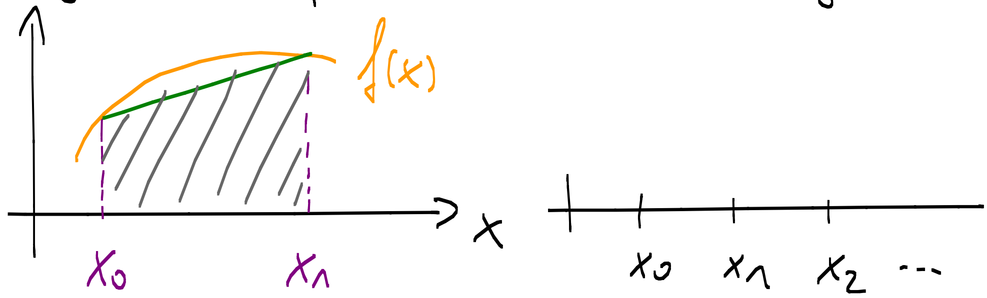
Runge-Kutta-Methode:

$$y' = f(x,y) \qquad y(x_0) = y_0$$

$$\underbrace{y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\,dt}_{\text{Integralgleichung}} \qquad y(x_0) = y_0$$

Lösung der Integralgls. ist auch Lösung der Dgl.

Trapezregel zur Approximation des Integrals:



$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(t,y(t))\,dt \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0, y(x_0)) + f(x_0+h, y(x_0+h))\right]$$

$y(x_0) + h\, f(x_0, y_0)$

$$y(x_0+h) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t,y(t))\,dt$$

$$y_{k+1} = y_k + h\, f(x_k, y_k)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[\ldots]$$

Picard-Iteration:

$$y' = f(x,y) \qquad y(x_0) = y_0$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$$

keine Aproximation des Integrals sondern eine Folge von Funktionen die gleichmäßig gegen die Lösung $y(x)$ konvergiert.

$$y_0(x),\ y_1(x),\ y_2(x),\ \dots,\ y_n(x)$$

Folge erzeugen:

$$y(x_0) = y_0 \qquad y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\,dt$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1)\,dt$$

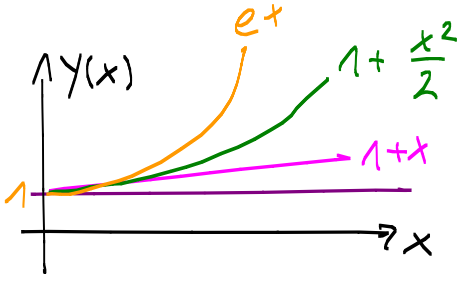
$$\vdots$$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1})\,dt$$

$f(x,y)$ muss Lipschitzstetig sein:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L \cdot |y_2 - y_1|$$

Beispiel: $y' = y \quad ; \quad y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad y(x) = e^x$



$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 1\,dt = 1+x$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (1+t)\,dt = 1 + t + \frac{t^2}{2}$$

$$y_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} = e^x$$