Differentialgleichungen Vo

Note Title 10.03.2008

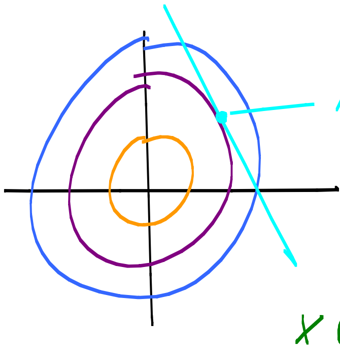
Kreisscheiben:

$x^2+y^2=r^2$

$2x+2yy'=0$

$y'=-\frac{x}{y}$

$y(x,y)=c$



Vollständiges Differential: $\frac{\partial y}{\partial x}dx+\frac{\partial y}{\partial y}dy=0$

Exakte Dgl $\quad M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$

$\frac{\partial y}{\partial x}=M \qquad \frac{\partial y}{\partial y}=N$

Satz von Schwarz

Symmetrische Form: $\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial y}\Leftrightarrow\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$

$\Rightarrow$ Dgl. ist exakt

$$\frac{\partial y}{\partial x}=M(x,y)\Rightarrow y(x,y)=\int M(x,y)\,dx+h(y)$$

$$N(x,y)=\frac{\partial y(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx+h'(y)$$

$$=\int\frac{\partial M}{\partial y}\,dx+h'(y)$$

$$= \int \frac{\partial N}{\partial x}\, dx + h'(y)$$

$$= N(x,y) - N(x_0,y_0) + h'(y)$$

$$h'(y) = N(x,y)$$

$$h(y) = \int N(x,y)\, dy + c \quad / c = 0$$

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ ... Dgl nicht exakt

⇒ Multiplikation einer Dgl mit integrierendem Faktor um eine Dgl. exakt zu machen

$M_y = N_x$ ⇒ Dgl nicht exakt

$\mu(x,y) M_y = \mu(x,y) N_x$ ⇒ Dgl ist exakt

↳ $\neq 0$ genannt Multiplikator

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(x,y)\, M(x,y)\right) \overset{?}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x,y)\, N(x,y)\right)$$

⇒ $\mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x$ ⇒ partielle Dgl 1. Ordnung (nicht allgemein lösbar)

⇒ es gibt nicht immer ein $\mu(x,y)$ das die Gleichung lösbar macht

1.) $\mu = \mu(x)$: $\mu(M_y - N_x) = \mu_x N$

$$\Rightarrow \frac{\mu_x}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{N} = f(x)$$

$$\Rightarrow \int \frac{d\mu}{\mu} = \int f(x)\,dx$$

2.) $\mu = \mu(y)$: $\mu_y M = \mu(N_x - M_y)$

$$\Rightarrow \frac{\mu_y}{\mu} = \frac{N_x - M_y}{M} = g(y)$$

$$\Rightarrow \int \frac{d\mu}{\mu} = \int g(y)\,dy$$

Wird ein Multiplikator berechnet immer die Probe machen, da die Dgl dadurch nicht zwingend exakt werden muss.

3.) $\mu(x,y) = X(x)\,Y(y)$

$$\mu_x = X'(x)\,Y(y)$$
$$\mu_y = X(x)\,Y'(y)$$

$$X(y)\,Y'(y)\,M(x,y) + X(x)\,Y(y)\,M_y =$$
$$X'(x)\,Y(y)\,N(x,y) + X(x)\,Y(y)\,N_x \quad \Big| \frac{1}{X(x)Y(y)}$$

$$\frac{Y'}{Y}\mu + M_y = \frac{X'}{X}N + N_x$$

$$\Rightarrow M_y - N_x = \frac{X'}{X}N - \frac{Y'}{Y}M \quad \Rightarrow f(x)\,N + g(y)\,M$$

Beispiel:

$$\underbrace{(xy^2+y)}_{M}\,dx \underbrace{-\,(x\ln(x))}_{N}\,dy = 0 \qquad \Rightarrow \text{beinhaltet auch } -!$$

$$M_y - N_x = 2xy + 1 + \ln(x) + 1$$

$$= 2(xy+1) + \ln(x)$$

$$\Rightarrow f(x)\,N(x,y) + g(y)\,M(x,y)$$

$$= \underbrace{-x\ln(x)\,f(x)}_{f(x) = -\frac{1}{x}} + \underbrace{(xy^2+y)\,g(y)}_{g(y) = \frac{2}{y}}$$

$\mu(x,y) = x^m y^n$ ... getrennte Variablen

$$\frac{x'}{x} = \frac{m}{x} \qquad \frac{y'}{y} = \frac{m}{y}$$

$\mu = \mu(\sigma(x,y))$ ... allgemeinster Fall σ beliebige Funktion

$$\left.\begin{aligned} \mu_x &= \mu_\sigma \sigma_x \\ \mu_y &= \mu_\sigma \sigma_y \end{aligned}\right\} \quad \frac{\mu_\sigma}{\mu} = \frac{N_x - M_y}{M\sigma_y - N\sigma_x}$$

$\Rightarrow$ kann sehr schnell sehr komplex werden