Datenstrukturen und Algorithmen

Altinger Harald
0630936

Note Title 14.01.2008

1. Betrachten Sie eine Variante der Binärsuche in der das Feld nicht in zwei sondern in c gleich große Abschnitte unterteilt wird (für eine beliebiges Konstante $c \in \mathbb{N}$, $c > 2$). Analysieren Sie die Laufzeit dieses Verfahrens.

$$T(n) = T\left(\frac{n}{c}\right) + O(1)$$

$$T\left(\frac{n}{c}\right) = T\left(\frac{\frac{n}{c}}{\frac{c}{1}}\right) + O(1)$$

$$= T\left(\frac{n}{c^2}\right) + O(1)$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{c^2}\right) + O(1) + O(1)$$

$$= T\left(\frac{n}{c^2}\right) + 2\,O(1)$$

$$T\left(\frac{n}{c^2}\right) = T\left(\frac{\frac{n}{c^2}}{\frac{c}{1}}\right) + O(1)$$

$$= T\left(\frac{n}{c^3}\right) + O(1)$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{c^3}\right) + O(1) + 2\,O(1)$$

$$= T\left(\frac{n}{c^3}\right) + 3\,O(1)$$

$$k = 3 \Rightarrow T\left(\frac{n}{c^k}\right) + k\,O(1)$$

$$\hookrightarrow \frac{n}{c^k} \stackrel{!}{=} 1 \qquad n = c^k$$

$$\log(n) = k \log(c)$$

$$k = \frac{\log(n)}{\log(c)}$$

$$T(n) = \underbrace{T\left(\frac{n}{c^{\left(\frac{\log(n)}{\log(c)}\right)}}\right)}_{\Theta(1)} + \frac{\log(n)}{\log(c)}\,\Theta(1)$$

$$T(n) = \frac{\log(n)}{\log(c)} \rightarrow \Theta(\log(n))$$

c beliebig aber const

2. Ein Feld $A[1..n]$ enthalte aufsteigend sortierte ganzzahlige Einträge. Nehmen Sie an daß die Einträge in etwa quadratisch ansteigen. D.h., für ein $a > 0, c > 0$ und $1 \leq i \leq n$ gilt: $A[i] \approx a + ci^2$, wobei a und c unbekannt sind. Entwerfen Sie einen Algorithmus der eine unter diesen Annahmen optimale Suche nach einem Element x durchführt, indem er eine (quadratische) Interpolationssuche macht (modifizieren Sie den INTSUCH-Algorithmus des Hilfsblattes aus der Vorlesung). Zeigen Sie daß die Formel nach der Sie den nächsten Feldindex berechnen (t in Zeile 2 des INTSUCH-Algorithmus in dem Hilfsblatt) eine passende quadratische Interpolation ist.

$$A = [1, \dots, n]$$

$$A[i] = a + ci^2 \rightarrow a = A[i] - ci^2$$

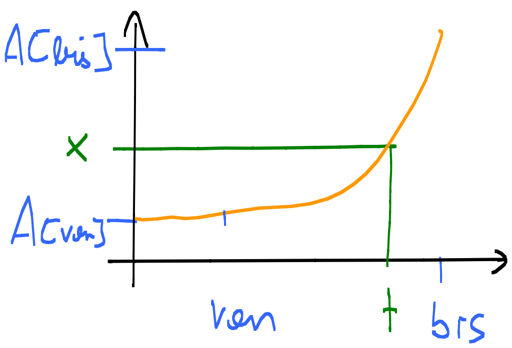
$$A[j] = a + cj^2 \rightarrow a = A[j] - cj^2$$

$$A[i] - ci^2 = A[j] - cj^2$$

$$A[i] - A[j] = c[i^2 - j^2]$$

$$c = \frac{A[i] - A[j]}{i^2 - j^2}$$

$$a = A[i] - \frac{A[i] - A[j]}{i^2 - j^2} i^2$$



$$A[t] = \overbrace{\frac{A[i] - A[j]}{i^2 - j^2}}^{c} t^2 + \overbrace{A[i] - \frac{A[i] - A[j]}{i^2 - j^2}}^{a} i^2$$

$$A[t] = ct^2 + a \rightarrow t = \sqrt{\frac{A[t] - a}{c}}$$

$$A[t] = x$$

$$i = von$$
$$j = bis$$

$$t = \sqrt{\frac{x - a}{c}}$$

$$t = \left\lfloor \sqrt{\frac{x - A[von] + \frac{A[von] - A[bis]}{von^2 - bis^2} von^2}{\frac{A[von] - A[bis]}{von^2 - bis^2}}} \right\rfloor$$

$$t = \left\lfloor \sqrt{\frac{x - A[von](von^2 - bis^2)}{A[von] - A[bis]} + von^2} \right\rfloor$$

```
INTSUCH(von,bis,x)
  IF A[von] < A[bis] THEN
    t = floor(sqrt((x-A[von]*(von^2 - bis^2)) / (A[von] - A[bis]) + von^2)
    IF x = A[t] then
      RETURN t
    ELSE
      IF x < A[t] THEN
        RETURN INTSUCH(von,t-1,x)
      ELSE
        RETURN INTSUCH(t+1,bis,x)
  ELSE
    IF x = A[von] THEN RETURN
      von
    ELSE
      RETURN -1
```

3. Ein Feld $A[1..n]$ sei unsortiert. Die Zugriffswahrscheinlichkeit für das Feldelement $A[i]$ sei

$$p_i = 2\frac{n-i+1}{(n+1)n}.$$

Angenommen Sie verwenden eine sequentielle Suche um ein Element in A zu finden. Wie groß ist der erwartete Suchaufwand (d.h. die Laufzeit der sequentiellen Suche im average case)?

$$p_i = 2 \cdot \frac{n-i+1}{n^2+n}$$

$$p_{n+1} = 1 - \sum_{i=1}^{n} p_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2(n-i+1)}{(n+1)n} = \frac{2}{n(n+1)} \left[n \cdot \sum_{i=1}^{n} 1 - \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \right]$$

$$= \frac{2}{\cancel{n}(n+1)} \left[n^{\cancel{2}} - \frac{\cancel{n}(n+1)}{2} + \cancel{n} \right]$$

$$= \frac{\cancel{2}n - \cancel{n} - \cancel{1} + \cancel{2}}{(\cancel{n+1})}$$

$$= 1$$

$$p_{n+1} = 1 - 1$$

$$= 0$$

$$E = \overbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot i}^{\in} + \overbrace{0 \quad (n+1)}^{\notin}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2 \frac{n-i+1}{n(n+1)} \cdot i$$

$$= \frac{2}{n(n+1)} \left[n \sum i - \sum i^2 + \sum i \right]$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{n}\cancel{(n+1)}} \left[\frac{n \cdot \cancel{n} \cdot \cancel{(n+1)}}{\cancel{2}} - \frac{\cancel{n}\cancel{(n+1)}(2n+1)}{\cancel{6}\ 3} + \frac{\cancel{n}\cancel{(n+1)}}{\cancel{2}} \right]$$

$$= n - \frac{2n+1}{3} + 1$$

$$= \frac{3n - 2n - 1 + 3}{3}$$

$$= \frac{n+2}{3}$$

$$\Rightarrow \Theta(n)$$