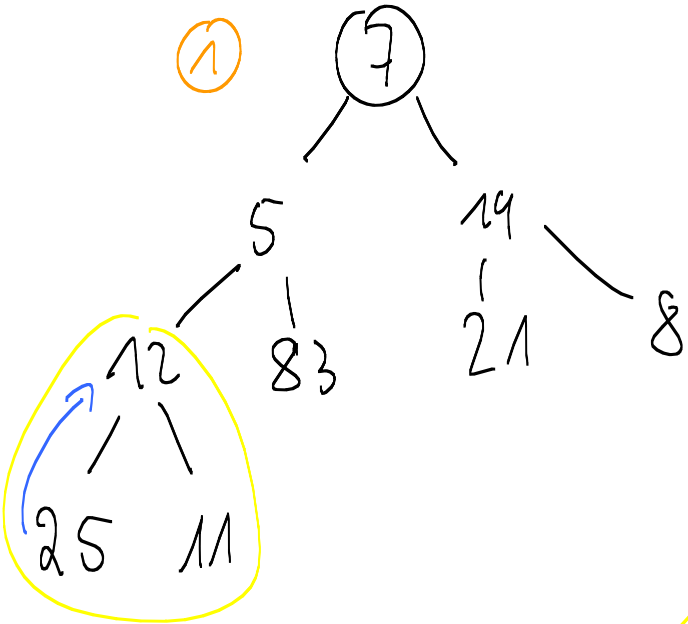
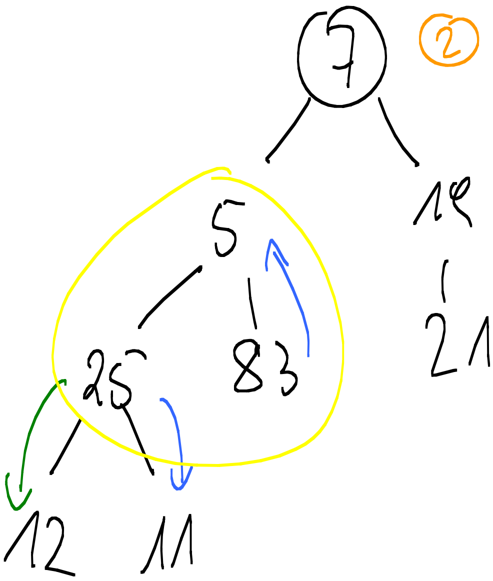
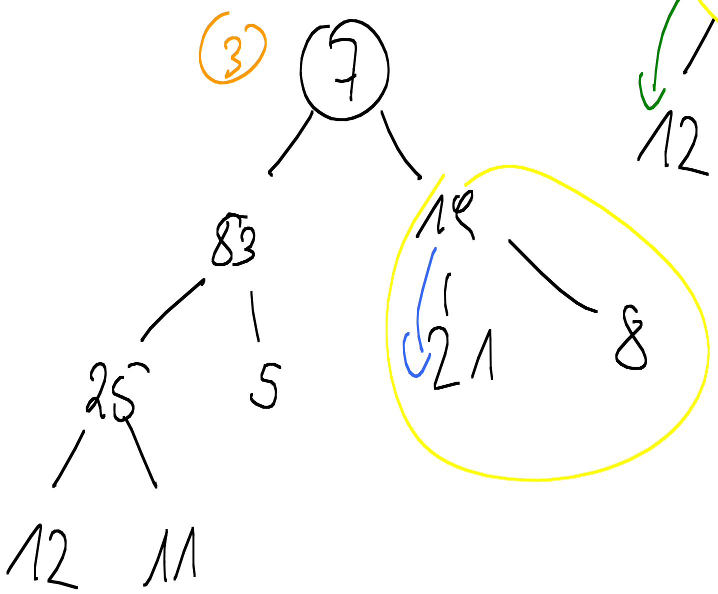
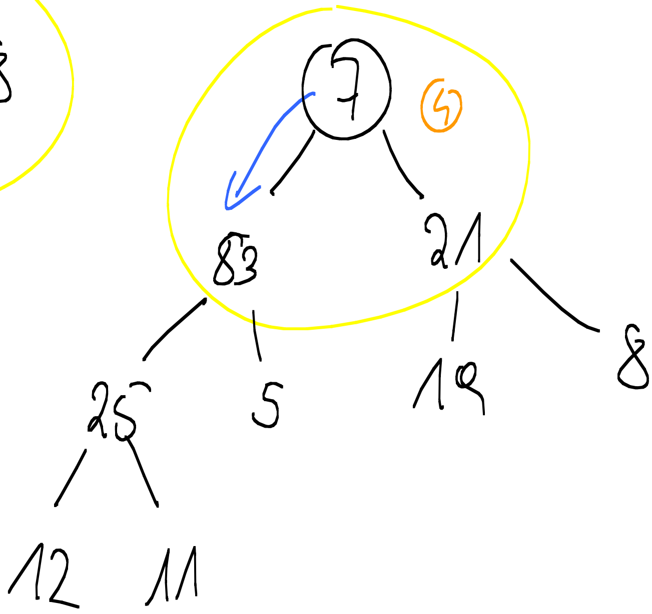
1. Illustrieren Sie mittels der Binärbaumrepräsentation der Halde wie BAUE_HALDE aus dem Array $A = [7, 5, 19, 12, 83, 21, 8, 25, 11]$ eine Halde baut.

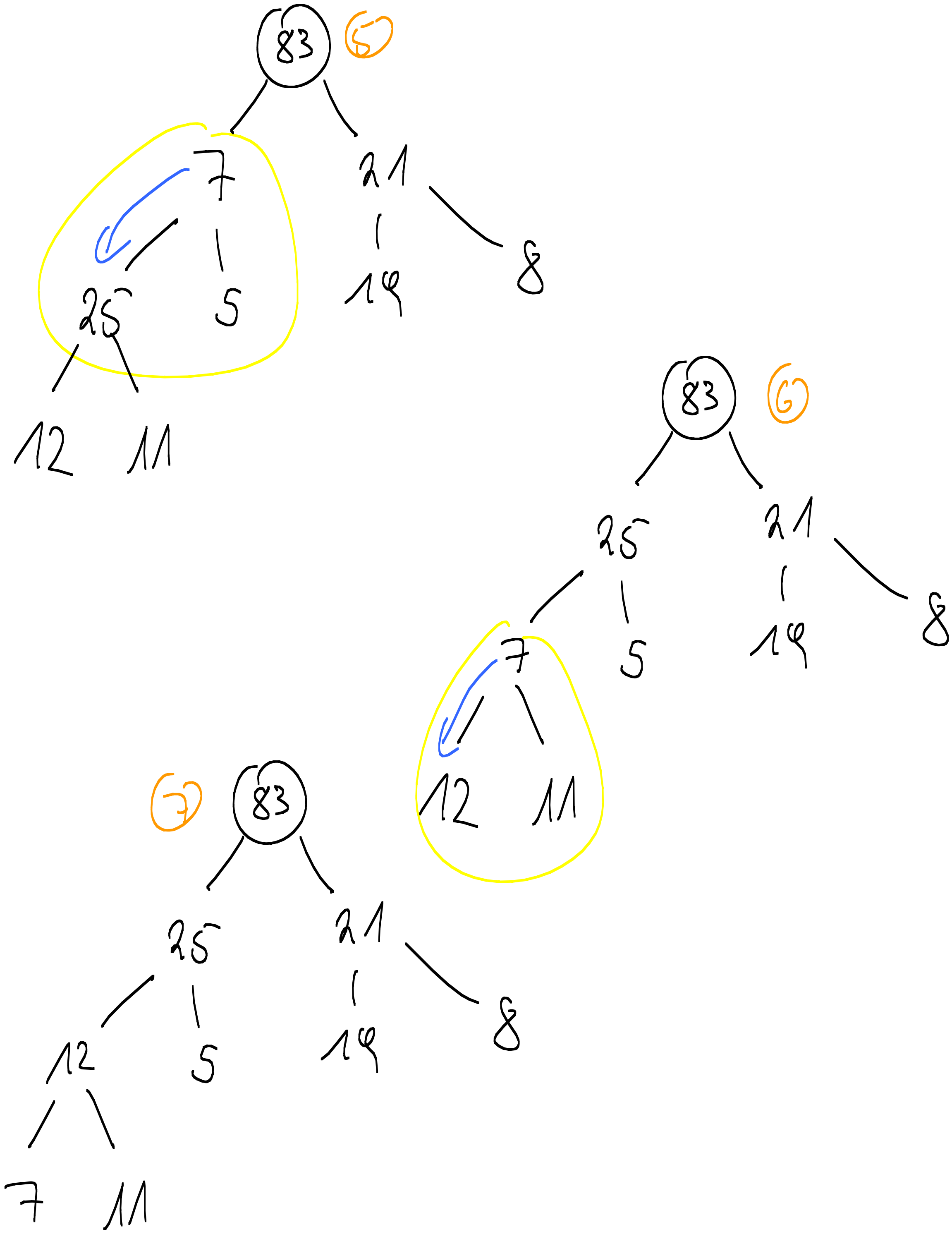
7	5	19	12	83	21	8	25	11
1	2	3	4	5	6	7	8	9







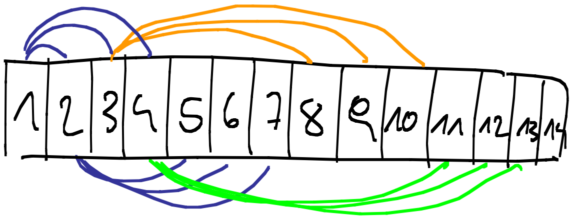




5
83
7
21
25
5
14
8
12
11
6
83
25
21
7
5
14
8
12
11
7
83
25
21
12
5
14
8
7
11

2. Analog zur Halde kann man auch eine Halde mit d Nachfolgern definieren. Das heißt, alle Nicht-Blätter (mit einer möglichen Ausnahme) haben dann d statt 2 Nachfolger. Eine solche Halde kann auch in einem Feld gespeichert werden. Wie würden Sie eine solche Halde in einem Feld repräsentieren (sodaß keine Lücken entstehen)? Geben Sie Funktionen `VATER(i)` und `KIND(i,j)` an. `VATER(i)` liefert den Index des Vater des Elementes an Stelle i. `KIND(i,j)` liefert den Index des j-ten Nachfolgers des Elements an Stelle i ($j \in \{1, \ldots, d\}$). Schreiben Sie Ihre Überlegungen nieder, die zu den Funktionen führten.

   Hilfe: Man kann eine Rekursive Formel aufschreiben um `KIND(i,1)` aus `KIND(i-1,1)` zu berechnen. Die Lösung der Rekursion liefert den gewünschten Zusammenhang. Um auf `VATER(i)` zu kommen könnte man evt. verwenden daß `VATER(KIND(i,j))` widerum i ergeben muß, und zwar für alle $j \in \{1, \ldots, d\}$.



z.B.: $d = 3$

$1 \to 2,\ 3,\ 4$ $\quad$ $2 \to 5,\ 6,\ 7$ $\quad$ $3 \to 8,\ 9,\ 10$

$(pos-1)d+1+1,\ +2,\ +3$ $\quad$ $(pos-1)d+1+1,\ +2,\ +3$ $\quad$ $(pos-1)\cdot d+1+1,\ +2,\ +3$

$$Kind(i,j) = (i-1)\cdot d + 1 + j$$

$$Vater(j) = \left\lceil \frac{j-1}{d} \right\rceil$$

$$A[i] \geq \max\{[(i-1)d+1+j], \ldots\} \quad \forall h = 1, \ldots, d$$

3. Wie groß ist die maximale Tiefe einer Halde mit d Nachfolgern mit n Elementen (falls Sie es benötigen: Die Formel für die geometrische Reihe können Sie recherchieren)?

$$n_{min} = \sum_{i=0}^{h-1} d^i + 1 = \sum_{i=0}^{h} d^i - d^h + 1 = \frac{1-d^{h+1}}{1-d} - d^h + 1$$

$$n_{min} = \frac{2 \cdot d}{1-d} + \frac{1}{d-1} \cdot d^h \leq n$$

$$\frac{1}{\underbrace{d-1}_{\underbrace{d>1}_{>0}}} \cdot d^h \leq n - \frac{2-d}{1-d}$$

$$d^h \leq \left(n - \frac{2-d}{1-d}\right)(d-1)$$

$$d^h \leq (d \cdot n - d - n + 2)$$

$$h = \lfloor \log_d (d \cdot n - d - n + 2) \rfloor$$

4. Geben Sie eine effiziente Implementierung (Pseudo-Code) von `Verhalde` für Halden mit d Nachfolgern an. Beschreiben Sie die Arbeitsweise Ihrer Lösung. Analysieren Sie die Laufzeit in Abhängigkeit von n (Anzahl der Haldenelemente) und d.

```
Verhalde(A,i)
index = i
for j=1 to d
  if kind(i,j) <= n AND A[Kind(i,j)] > A[index]
  then index = Kind(i,j)
if i != index
  Vertausche (A[i], A[index])
  Verhalde (A, index)
```

A[i] wird im Vergleich zum urspruenglichen Algorithmus nun mit allen j Kindern von i verglichen. Im Gegensatz zum uerspruegnlichen Algorithmus ist di eAnzahl der Kinder eben d und nicht mehr 2. Daher auch die For schleife.