Datenstrukturen und Algorithmen

Altinger Harald
0630936

Note Title 18.10.2007

1.) $n! = O(n^n)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} < \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 1}{\cancel{n}\cdot \underbrace{n\cdot n\cdots n}_{n}} ;$$

$$\frac{(n-1)}{n} = 1-\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Folge konvergiert $\Rightarrow$ sie ist beschränkt;

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < \infty$$

↳ letztes Glied $\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow$ es gilt $n! = \Theta(n^n)$

2.) $\ln(n) = \Theta(\sqrt{n}) \Rightarrow \ln(n) = \Theta(n^{\frac{1}{2}})$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n) \to \infty}{n^{\frac{1}{2}} \to \infty}$$

De l'Hospital

$$\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2}n^{-\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2n^{\frac{1}{2}}}} = \frac{2n^{\frac{1}{2}}}{n} = 2n^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < \infty$$

$\Rightarrow$ es gilt $\ln(n) = \Theta(\sqrt{n})$

3.) $\ln(n!) = \Theta(n \cdot \ln(n))$

$$\Theta = O \ \& \ \Omega$$

O: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n!)}{n \cdot \ln(n)} = \dfrac{\frac{1}{n!}}{\ln(n) + 1}$ De l' Hospital

Produktregel: $(n \cdot \ln(n))' = 1 \cdot \ln(n) + n \cdot \frac{1}{n} \cdot 1$

$$= \frac{1}{n! \cdot (\ln(n) + 1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < \infty$$

De l' Hospital

Ω: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n \cdot \ln(n)}{\ln(n!)} \Rightarrow n! \cdot (\ln(n) + 1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \not< \infty$

Es gilt $\ln(n!) = O(n \ln(n))$, jedoch nicht $\ln(n!) = \Omega(n \ln(n))$, daher gilt auch nicht $\ln(n!) = \Theta(n \cdot \ln(n))$

4.) $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$

Bsp.: $f(n) = 2n \qquad g(n) = 4n^2$

$2n = O(4n) \qquad \lim \dfrac{2n}{4n^2} = \dfrac{1}{2n} < \infty$ ✓

$2^{2n} = O(2^{4n}) \qquad \lim \dfrac{2^{2n}}{2^{4n^2}} = \dfrac{2\ln(2n)}{2\ln(4n^2)} = \dfrac{\frac{1}{2n}}{\frac{1}{4n^2}} = \dfrac{4n^2}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

Widerspruch durch Bsp.