**Aufgabe 1:**

Gegeben sei folgendes mathematische Modell eines Systems mit der Eingangsgröße $u$, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße $y$:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -3\\ 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & \beta\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Hierbei seien $\alpha$ und $\beta$ reelle Parameter mit $\beta \neq -1$.

a) Bestimmen Sie die zu obigem mathematischen Modell gehörige Transitionsmatrix $\boldsymbol{\Phi}(t)$.
b) Berechnen Sie die zu obigem mathematischen Modell gehörige Gewichtsfunktion $g(t)$.
c) Ermitteln Sie den größtmöglichen Wertebereich für die Parameter $\alpha$ und $\beta$ so, dass obiges mathematische Modell asymptotisch stabil ist.
d) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich für die Parameter $\alpha$ und $\beta$ so, dass obiges System die BIBO-Eigenschaft aufweist.

**Aufgabe 2:**

Gegeben sei folgendes **nicht beobachtbare** mathematische Modell eines Systems 2. Ordnung mit der Eingangsgröße $u$, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße $y$:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}1 & -2\end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Weiters ist ein Rechts-Eigenvektor $\mathbf{p}_1^T=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}$ mit dem zugehörigen Eigenwert $s_1=-1$ bekannt.

a) Bestimmen Sie den zweiten Rechts-Eigenvektor $\mathbf{p}_2$ des obigen mathematischen Modells.
b) Ist das mathematische Modell steuerbar? (*Geben Sie eine mathematische Begründung an!*)
c) Skizzieren Sie in der Zustandsebene die Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten $t$) für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0^T=\begin{bmatrix}0 & 3\end{bmatrix}$, wenn für den zum zweiten Rechts-Eigenvektor $\mathbf{p}_2$ zugehörigen Eigenwert $s_2$ gilt:

$$s_2^{(1)}=-4,\qquad s_2^{(2)}=0,\qquad s_2^{(3)}=1$$

(Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t\to\infty$) erkennbar sein.)

**Aufgabe 3:**

Gegeben sei folgendes mathematische Modell eines Systems mit der Eingangsgröße $u$, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße $y$:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}u$$
$$y = \begin{bmatrix} -2 & c_2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}u$$

($a_1$, $a_2$ und $c_2$ seien hierbei reelle Parameter.)

Auf das System werden jeweils (bei geeignet gewählten Anfangszuständen $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$) zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ folgende Eingangsfunktionen aufgeschaltet und Ausgangsgrößen beobachtet (für $t \geq 0$):

i. $u(t) = 2e^{1t}$ liefert $y(t) = 20e^{-1t}$
ii. $u(t) = 2e^{2t}$ liefert $y(t) = 20e^{-2t}$
iii. $u(t) = 2e^{\xi t}$ liefert $y(t) = 20e^{-3t}$ ($\xi$ sei ein reeller Parameter)

a) Bestimmen Sie die Werte von $a_1$, $a_2$ und $\xi$.

b) Ermitteln Sie den Wert von $c_2$.

c) Berechnen Sie für den dritten Fall (iii.) den Anfangszustand $\mathbf{x}_0$.

# CS 2 UE 1 / I

Notiztitel 08.10.2008

Mi, 8.10. -> UE 1 / I
15.10. -> UE 1 / II
22.10. -> UE 2 / I
⋮

Übungsschema

Mo–Mi, 1.–3.12
-> Matlab/Sim.

Sondertermin

---

Heute: CS 1 – Prüfung vom 30.06.08

Ergebnis: 70 Teilnehmer
21 P (30 %) „1" oder „2" ☺
29 P (41 %) „5" ☹
17 P (24 %) ≤ 4/19 Punkte

---

1) a)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 1] \cdot x$$

=> $x_2$ entkoppelt

=> 2 Teilsysteme

Teilsysteme:

i) $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$

ii) $\dot{x} = [\alpha] \cdot x$

i) EW: $\det(sE-A) \stackrel{!}{=} 0$ unnötig weil obere $\Delta$

$\rightarrow -1 \,/\, \beta$

EV: $(s_i E - A) \cdot p_i \stackrel{!}{=} 0$ $\quad (sE-A) = \begin{bmatrix} s+1 & 3 \\ 0 & s-\beta \end{bmatrix}$

$s_1 = -1$: $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1-\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$s_2 = \beta$: $\begin{bmatrix} \beta+1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -(\beta+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad p_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -(\beta+1) \end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -(\beta+1) \end{bmatrix}$ $\quad P^{-1} = \frac{1}{-(\beta+1)} \begin{bmatrix} -(\beta+1) & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$P^{-1} = \frac{1}{\beta+1} \begin{bmatrix} \beta+1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$\phi_i(t) = P \operatorname{diag}(e^{s_i t}) P^{-1} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -(\beta+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{\beta t} \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} e^{-t} & 3e^{\beta t} \\ 0 & -(\beta+1)e^{\beta t} \end{bmatrix}} \cdot \frac{1}{\beta+1} \begin{bmatrix} \beta+1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$\phi_i(t) = \frac{1}{\beta+1} \begin{bmatrix} (\beta+1)e^{-t} & 3e^{-t} - 3e^{\beta t} \\ 0 & (\beta+1)e^{\beta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & \frac{3}{\beta+1}(e^{-t} - e^{\beta t}) \\ 0 & e^{\beta t} \end{bmatrix}$$

$$\phi_i(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & \frac{3}{\beta+1}\left(e^{-t} - e^{\beta t}\right) \\ 0 & e^{\beta t} \end{bmatrix}$$

ii) $\dot{x} = [\alpha] \cdot x$

$$\boxed{\phi_{ii}(t) = e^{\alpha t}}$$

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & \frac{3}{\beta+1}\left(e^{-t} - e^{\beta t}\right) \\ 0 & e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\beta t} \end{bmatrix}$$

b) $g(t) = c^T \cdot \phi(t) \cdot b =$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{c|c|c} e^{-t} & 0 & \frac{3}{\beta+1} e^{-t} - \frac{3}{\beta+1} e^{\beta t} \\ 0 & e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\beta t} \end{array}\right]}_{\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & \frac{3}{\beta+1} e^{-t} + \left(1 - \frac{3}{\beta+1}\right) e^{\beta t} \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\boxed{g(t) = \frac{3}{\beta+1} e^{-t} + \left(1 - \frac{3}{\beta+1}\right) e^{\beta t}}$$

c) Asymptot. Stabil $\Leftrightarrow$ Alle EW "links"

EW: $-1, \alpha, \beta \quad \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \alpha < 0 \\ \beta < 0 \end{matrix}}$

d) BIBO $\Leftrightarrow$ Alle Pole "links"

von $G(s) = c^T (sE - A)^{-1} \cdot b + d$

oder $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} + d$

$\Updownarrow$

$$\lim_{t \to \infty} g(t) = 0$$

$$\lim_{t \to \infty} \left( \underbrace{\frac{3}{\beta+1} e^{-t}}_{\checkmark} + \underbrace{\left(1 - \frac{3}{\beta+1}\right) e^{\beta t}} \right) =$$

•) $\beta < 0$

•) $1 - \frac{3}{\beta+1} = 0$ (entspricht Kürzung in $G(s)$)

$\rightarrow \beta + 1 - 3 = 0$

$\Rightarrow \beta = 2$

$$\boxed{\text{BIBO} \Leftrightarrow \beta < 0 \text{ oder } \beta = 2}$$

---

Bsp. 1 ENDE

2) $\dot{x} = Ax + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$
$y = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} x$

nicht beobachtb.

$\Updownarrow$

$\boxed{\exists\, p_i \text{ so dass } c^T \cdot p_i = 0}$

a)

$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow \quad c^T \cdot p_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 3 \neq 0$

$p_2 \perp c \qquad c^T \cdot p_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} 0$

$p_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\boxed{\text{steuerbar} \Leftrightarrow \not\exists\, \rho_i \text{ so dass } \rho_i^T \cdot b = 0}$

$\rho_1 \perp p_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\rho_1^T b = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{1 \neq 0}$

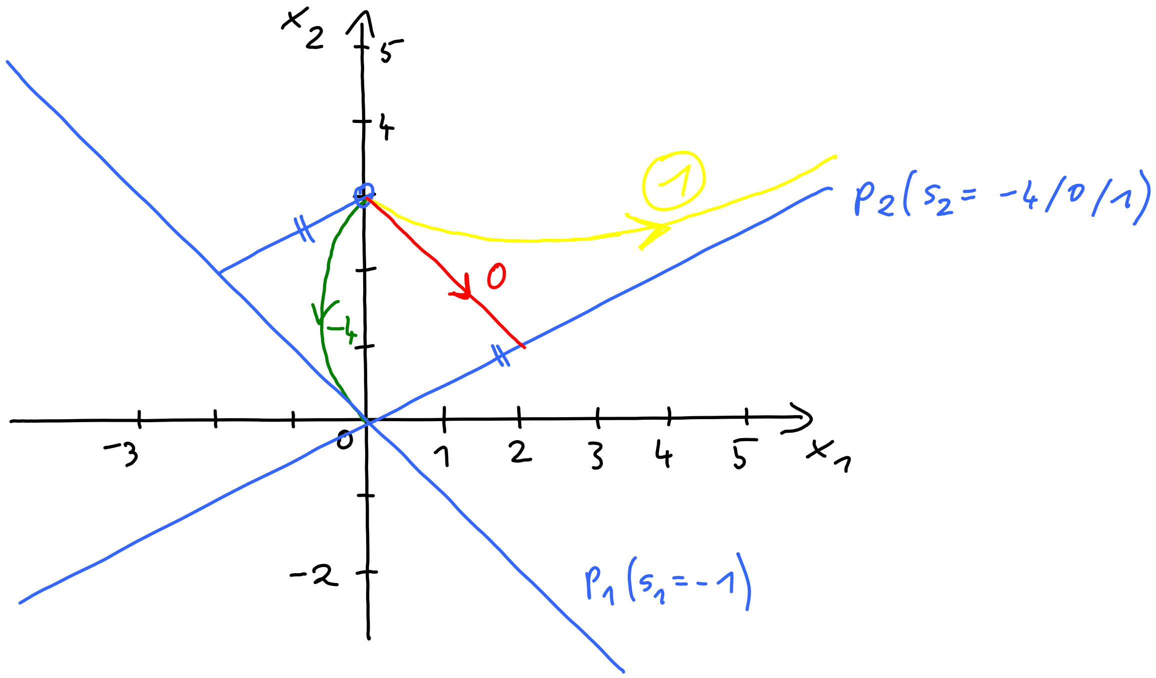
$\rho_2 \perp p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\rho_2^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{2 \neq 0}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{steuerbar}}$

c) $x(t) = \gamma_1 p_1 e^{s_1 t} + \gamma_2 p_2 e^{s_2 t} =$

$$= \gamma_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} + \gamma_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{s_2 t}$$




Bsp. 2 ENDE

3) $\boxed{u(t) = U e^{\xi t} \qquad \xi \neq EW}$

$\Downarrow$

$$y(t) = c^T \cdot \phi(t)\eta + G(\xi)\,U \cdot e^{\xi t}$$

i) $u(t) = 2e^{t}$ $\rightarrow$ $y(t) = c^T \phi(t)\eta + G(1) \cdot 2e^{t}$

$(U = 2,\ \xi = 1)$

$\stackrel{!}{=} 20 \cdot e^{-t}$

$\Rightarrow EW: -1$

$\Rightarrow G(1) = 0$

ii) $u(t) = 2e^{2t}$ $\quad y(t) = c^T \cdot \phi(t)\,\eta + G(2) \cdot 2 \cdot e^{2t} \overset{!}{=} 20\,e^{-2t}$

$(U=2,\ \xi=2)$

$\Rightarrow$ EW: $-2$

$\Rightarrow G(2) = 0$

iii) $u(t) = 2e^{\xi t}$ $\quad y(t) = \underbrace{c^T \phi(t)\,\eta}_{0} + G(\xi)\,2e^{\xi t} \overset{!}{=} 20\,e^{-3t}$

$(U=2, \ldots)$

bem.: 2 EW bekannt

$\Rightarrow \eta = 0$

$\Rightarrow \xi = -3$

$G(-3) = 10$

a) $a_1, a_2$ $\quad (\xi = -3)$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad \det(sE - A) = \begin{vmatrix} s-a_1 & -a_2 \\ -2 & s+2 \end{vmatrix} =$$

$$= s^2 + (2 - a_1)\,s + (-2a_1 - 2a_2) \overset{!}{=}$$

$$(s+1)\cdot(s+2) = s^2 + 3s + 2$$

$$2 - a_1 = 3 \quad \rightarrow \quad \boxed{a_1 = -1}$$

$$-2a_1 - 2a_2 = 2 \quad \rightarrow \quad \boxed{a_2 = 0}$$

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}}$$

b)

$$G(s) = c^T \cdot (sE - A)^{-1} b + d =$$

$$\boxed{= \frac{-2s - 4 - c_2 s + c_2}{(s+1)(s+2)} + 1 = G(s)}$$

$$G(1) = \frac{-2 - 4 - c_2 + c_2}{2 \cdot 3} + 1 = -\frac{6}{6} + 1 = 0$$

$$G(2) = \frac{-4 - 4 - 2c_2 + c_2}{3 \cdot 4} + 1 \overset{!}{=} 0$$

$$(-8 - c_2)/12 + 1 = 0$$

$$-8 - c_2 + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c_2 = 4}$$

$$G(-3) = \frac{6 - 4 + 3c_2 + c_2}{(-2)(-1)} + 1 \overset{!}{=} 10$$

$$1 + 2c_2 + 1 = 10 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c_2 = 4}$$

c)

$$x_0 = \eta + (\underset{\substack{\downarrow \\ -3}}{s}E - A)^{-1} b \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 2}}{u} \qquad \boxed{\eta = 0}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot 2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot 2 =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 2+2 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{x_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}}$$