(43) (a) $\sum_{k=1}^{n} \cos((2k-1)x)$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(e^{i(2k-1)x} + e^{-i(2k-1)x}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\left(e^{2ix}\right)^k \cdot e^{-ix} + \left(e^{-2ix}\right)^k \cdot e^{ix}\right)$$

$$\left[\begin{array}{ll} a_0 = \frac{1}{2} e^{-ix} & a_0 = \frac{1}{2} e^{ix} \\ q = e^{2ix} & q = e^{-2ix} \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(e^{ix} \cdot \frac{e^{2i(n)x} - 1}{e^{2ix} - 1} + e^{-ix} \cdot \frac{e^{-2i(n)x} - 1}{e^{-2ix} - 1}\right)$$

geometr. Reihe:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_0 q^k = a_0 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} a_0 q^k = q \cdot S_{n-1} = a_0 \cdot q \cdot \frac{q^{n} - 1}{q - 1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_0 q^k = q \cdot \sum_{k=1}^{n} a_0 q^{k-1} = q \sum_{j=0}^{n-1} a_0 q^k = a_0 \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_0 S_{n-1}$$

(b) $\sum_{k=1}^{n} \sin(2(k-1)x)$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2i}\left(\left(e^{2ix}\right)^k \cdot e^{-ix} - \left(e^{-2ix}\right)^k \cdot e^{ix}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{ix} \cdot \frac{e^{2i(n)x} - 1}{e^{2ix} - 1} - e^{-ix} \cdot \frac{e^{-2i(n)x} - 1}{e^{-2ix} - 1}\right)$$

(c) $\sum_{k=1}^{n} e^{i(2k-1)x} = \sum_{k=1}^{n}\left[\cos((2k-1)x) + i \sin((2k-1)x)\right]$

$$\overset{a_0}{=} \sum_{k=1}^{n} e^{-ix}\left(e^{2ix}\right)^k$$

$$= e^{-ix} \cdot e^{2ix} \cdot \frac{e^{2i(n)x} - 1}{e^{2ix} - 1}$$

$$= \frac{e^{2i(n)x} - 1}{e^{ix} - e^{-ix}} = \frac{e^{2i(n)x} - 1}{2i \sin x} = \frac{-i\left[\cos(2(n)x) + i\sin(2(n)x)\right] + i}{2\sin x}$$

$$= \frac{1}{2\sin x}\left\{\underbrace{\sin((2n)x)}_{(a)} + i\underbrace{\left[-\cos((2n)x) + 1\right]}_{(b)}\right\}$$

$= \sum_{k=0}^{n-1}$