Analysis 1

Herwig Stütz

25. November 2006 in Graz

1 Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

Die Definition der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ basiert auf folgenden Axiomen:

- Körperaxiome
- Anordnungsaxiome
- Vollständigkeitsaxiom

Diese Axiome werden als unabhängig, widerspruchsfrei und vollständig angenommen.

1.1 Axiome der Addition

A1 $\forall a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow (a+b) \in \mathbb{R}$

A2 $a+b=b+a$

A3 $(a+b)+c=a+(b+c)$

A4 $\forall a, b \in \mathbb{R} : \exists! x \in \mathbb{R} : a+x=b$

1.1.1 Folgerungen

1. $a=b \Rightarrow a+c=b+c$
2. $a+c=b+c \Rightarrow a=b$
3. $\exists 0 \in \mathbb{R} : a+0=0+a=a$

1.2 Axiome der Multiplikation

M1 $\forall a, b \in \mathbb{R} : (a \cdot b) \in \mathbb{R}$

M2 $a \cdot b = b \cdot a$

M3 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

M4 $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \exists! x : a \cdot x = b$

M5 $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

1.2.1 Folgerungen

1. $\forall c \in \mathbb{R} : a = b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c$
2. $a \cdot c = b \cdot c, c \neq 0 \Rightarrow a = b$
3. $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$
4. $\exists! 1 : \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, 1 \neq 0$
5. $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \exists x : \frac{1}{a} = x$

1.3 Anordnungsaxiome

O1 $<$ ist eine Relation auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ d.h. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ist die Relation $a < b$ entweder wahr oder falsch. Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der folgenden Relationen:

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b$$

O2 $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$

O3 $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

O4 $0 < c : a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$

1.3.1 Folgerungen und Definitionen

1. $a \leq b \Rightarrow a < b \oplus a = b \quad$ ($\oplus$ logisches XOR)
2. $a > b \Leftrightarrow b < a$
   $a > 0$ positiv, $a \geq 0$ nicht negativ
   $a < 0$ negativ, $a \leq 0$ nicht positiv

Betrag $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$

$$a \in \mathbb{R} \mapsto |a| = \begin{cases} a & \text{wenn } a \geq 0 \\ -a & \text{wenn } a < 0 \end{cases}$$

1. $\forall a \in \mathbb{R} : |a| \geq 0 \quad |a| = 0 \Rightarrow a = 0$
2. Dreiecksungleichung $||b| - |a|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$

Definition $\mathbb{M}$ heißt induktive Menge, falls gilt:

$$1 \in \mathbb{M} \wedge (x \in \mathbb{M} \Rightarrow x + 1 \in \mathbb{M})$$

Definition Der Durchschnitt aller indutiven Mengen definiert die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

- Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$: A1-A3, M1-M3, M5, O1-O4
- Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$: $\mathbb{N}$ + A4
- Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Z}$ + M4
- Reelle Zahlen $\mathbb{R}$: $\mathbb{Q}$ + irrationale Zahlen

Definition Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge.

- $a \in \mathbb{R}$ heißt untere Schranke von M, falls $\forall x \in M : a \leq x$
- $b \in \mathbb{R}$ heißt obere Schranke von M, falls $\forall x \in M : x \leq b$
- M heißt nach unten bzw. nach oben beschränkt, falls eine untere bzw. obere Schranke existiert.
- Die größte untere Schranke a von M heißt Infimum, $a = \inf M$
- Die kleinste obere Schranke b von M heißt Supremem, $b = \sup M$

Lemma Sei M eine nach unten beschränkte Menge. Dann gilt

$$\begin{aligned} a = \inf M \Longleftrightarrow\ & a \leq x \, \forall x \in M \\ & \forall \epsilon > 0 \, \exists y \in M : y < a + \epsilon \end{aligned}$$

Definition

- $a \in \mathbb{R}$ heißt Minimum von M, falls $a \leq x \, \forall x \in M$ und $a \in M$
- $b \in \mathbb{R}$ heißt Maximum von M, falls $x \leq b \, \forall x \in M$ und $b \in M$

1.4 Vollständigkeitsaxiom

V1 Jede nach unten beschränkte nichtleere Menge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Infimum in $\mathbb{R}$.

Geometrisches bzw. arithmetsiches Mittel Aus $a \cdot b \leq \frac{1}{4}(a+b)^2$ folgt für $a, b > 0$:

$$\underbrace{\sqrt{a \cdot b}}_{\text{geometr. Mittel}} \leq \underbrace{\frac{1}{2}(a+b)}_{\text{arithm. Mittel}}$$

Bernoullische Ungleichung Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \geq -1$ gilt:

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$$

1.5 Euklidsche Räume $\mathbb{R}^n$

Die Menge aller n-Tupel von reellen Zahlen

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{x}, x_k \in \mathbb{R} \right\}$$

Definition der Addition

$$\underline{u} + \underline{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

A1-A4 erfüllt, Nullelement $\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Definition der Multiplikation mit einem Skalar

$$\alpha \in \mathbb{R}, \underline{u} \in \mathbb{R}^n : \alpha \cdot \underline{u} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot u_1 \\ \alpha \cdot u_2 \\ \vdots \\ \alpha \cdot u_n \end{pmatrix}$$

Eigenschaften

1. $(\alpha + \beta) \cdot \underline{u} = \alpha\underline{u} + \beta\underline{u}$
2. $\alpha \cdot (\underline{u} + \underline{v}) = \alpha\underline{u} + \alpha\underline{v}$
3. $\alpha \cdot (\beta\underline{u}) = (\alpha\beta) \cdot \underline{u} = (\beta\alpha) \cdot \underline{u} = \beta(\alpha \cdot \underline{u})$
4. $1 \cdot \underline{u} = \underline{u}$

Damit wird der Euklidsche Raum $\mathbb{R}^n$ zu einem Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit dem Euklidschen Abstand.

$$|\underline{u}| = ||\underline{u}||_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} u_k^2} = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Positivität

$$|\underline{u}| \geq 0, \forall \underline{u} \in \mathbb{R}^n, \quad |\underline{u}| = 0 \Longleftrightarrow \underline{u} = \underline{0} \in \mathbb{R}^n$$

Homogenität

$$|\alpha\underline{u}| = |\alpha| \cdot |\underline{u}| \, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \underline{u} \in \mathbb{R}^n$$

Dreiecksungleichung

$$||\underline{u}| - |\underline{v}|| \leq |\underline{u} + \underline{v}| \leq |\underline{u}| + |\underline{v}|$$

Skalarprodukt

$$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \underline{u} \cdot \underline{v} = \sum_{k=1}^{n} u_k \cdot v_k = (\underline{u}, \underline{v})_2 = \underline{v}^T \underline{u}$$

Eigenschaften

1. $|\underline{u}|^2 = \sum_{k=1}^n u_k^2 = \sum_{k=1}^n u_k \cdot u_k = \underline{u} \cdot \underline{u} : ||\underline{u}||_2^2 = (\underline{u}, \underline{u})_2$
2. $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$
3. $(\underline{u} +_{\mathbb{R}^n} \underline{v}) \cdot \underline{w} = (\underline{u} \cdot \underline{w}) +_{\mathbb{R}} (\underline{v} \cdot \underline{w})$
4. $(\alpha \underline{u}) \cdot \underline{v} = \alpha(\underline{u} \cdot \underline{v})$

Cauchy-Schwarz-Bunjakowski-Ungleichung

$$|\underline{u} \cdot \underline{v}| \leq |\underline{u}| \cdot |\underline{v}|$$

2 Folgen und Reihen

- Eine Zahlenfolge ist eine Abbildung der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}(\mathbb{N}_0)$ in die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen bzw. $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. D.h. $\{a_x\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ heißt Zahlenfolge, falls $a_k : \mathbb{N} \to \mathbb{C}, k \to a_k$ eindeutig festgelegt ist.

- Eine Funktion bzw. Abbildung f ordnet jedem Element $x \in D$ einer Menge D eindeutig ein Element $y = f(x) \in Y$ zu. Dabei ist D der Definitionsbereich, für den diese Abbildung erklärt ist.

- Die Bildmenge Y enthält alle Bildpunkte $y = f(x)$.

- Der Wertebbereich W ist die Menge aller Funktionswerte $f(x)$:

$$W = \{y \in Y : \exists x \in D : f(x) = y\} \subset Y$$

$$\begin{aligned} f :& D \to W \subset Y \\ & x \mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

- Die Abbildung $f : D \to W$ heißt injektiv, falls zu jedem $y \in W$ genau ein Urbild $x \in D$ gehört: $\forall y \in W \exists! x \in D : y = f(x)$

- Die Abbildung $f : D \to Y$ heißt surjektiv, falls zu jedem $y \in Y$ wenigstens ein $x \in D$ existiert mit $f(x) = y : f : D \to W = Y = f(D)$

- Eine Abbildung welche injektiv und surjektiv ist, heißt bijektiv.

- Eine Zahlenfolge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ heißt konvergent, falls ein $a \in \mathbb{C}$ existiert, sodass $\forall \epsilon > 0 \, \exists N_\epsilon : |a_k - a| < \epsilon \quad \forall k > N_\epsilon$

$$a = \lim_{k\to\infty} a_k$$

- Eine nicht konvergente Zahlenfolge hisßt divergent.

- Eine Zahlenfolge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ konvergiert gegen $a = \lim_{k\to\infty} a_k \in \mathbb{C}$ wenn:

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} : |a - a_k| < \epsilon \quad \forall k \geq N_\epsilon$$

  Folgerung: Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.

2.1 Konvergenz in $\mathbb{R}^n$

$\{\underline{a}^k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ heißt konvergente Punktfolge gegen $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ wenn

$$\forall \epsilon > 0 : \, \exists N_\epsilon : |\underline{a}^k - \underline{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(a_i^k - a_i\right)^2} < \epsilon \quad \forall k \geq N_\epsilon$$

Satz Eine Punktfolge $a = \lim_{k\to\infty} a_k \in \mathbb{R}^n$ konvergiert dann, und nur dann, wenn die Zahlenfolgen $a_i = \lim_{k\to\infty} a_i^k$ konvergieren für alle $i = 1, \ldots, n$

Satz $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}, \quad \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $a_k \leq b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$ und $a = \lim_{k\to\infty} a_k, \quad b = \lim_{k\to\infty} b_k$. Dann gilt $a \leq b$.

Satz Jede konvergente Zahlenfolge ist beschränkt.
Bemerkung: Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht.

2.2 Grenzwertregeln

Für konvergente Zahlenfolgen $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}, \quad \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $\lim_{k\to\infty} |a_k| = |\lim_{k\to\infty} a_k|$
2. $\lim_{k\to\infty}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \lim_{k\to\infty} a_k + \beta \lim_{k\to\infty} b_k$
3. $\lim_{k\to\infty}(a_k \cdot b_k) = (\lim_{k\to\infty} a_k) \cdot (\lim_{k\to\infty} b_k)$

4. $b_k \neq 0$, $b = \lim_{k\to\infty} b_k \neq 0 \quad \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \frac{\lim a_k}{\lim b_k}$

5. $\lim_{k\to\infty} \sqrt[p]{a_k} = \sqrt[p]{\lim_{k\to\infty} a_k}$

Satz Einschließungskriterium

$$\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{c_k\}_{k\in\mathbb{N}} \quad a_k \leq c_k \leq b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Es gelte $\lim_{k\to\infty} a_k = c = \lim_{k\to\infty} b_k$.
Dann ist auch $c = \lim_{k\to\infty} c_k$

Definitionen Sei $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ gegeben. Diese heißt

- streng monoton wachsend: $a_{k+1} > a_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$
- streng monoton fallend: $a_{k+1} < a_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$
- monoton wachsen: $a_{k+1} \geq a_k$
- monoton fallen: $a_{k+1} \leq a_k$

Satz Eine Folge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ sei monoton fallend/steigend und nach unten/oben beschränkt. Dann ist die Folge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent.

Für $a < b \quad a, b \in \mathbb{R}$. Dann heißt das Intervall

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ offen
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ abgeschlossen
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ halb offen, halb abgeschlossen

Definition Eine Intervallschachtelung ist eine Familie $\{J_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ von Intervallen $[a_k, b_k] = J_k$ mit

$$J_{k+1} \subset J_k \quad \lim_{k\to\infty} (b_k - a_k) = 0$$

Satz Zu jeder Intervallschachtelung existiert eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit

$$x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} J_k \quad x = \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k$$

Definition (Teilfolge) Sei $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ und sei $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ eine unbeschränkte Teilmenge. Dann heißt $\{a_l\}_{l\in\mathbb{N}'}$ eine Teilfolge von $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$

Satz von Bolzano-Weierstraß Jede beschränkte Folge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ enthält wenigstens eine konvergente Teilfolge.

Lemmata Folge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ ist konvergent $\Longleftrightarrow$ alle Teilfolgen $\{a_l\}_{l\in\mathbb{N}'}$ konvergent. Eine beschränkte Folge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ ist konvergent $\Longleftrightarrow$ alle konvergenten Teilfolgen haben den gleichen Grenzwert

Definition Ein Element $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt der Folge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, wenn diese eine gegen α konvergente Teilfolge besitzt. D.h.:

$$\alpha = \lim_{l\in\mathbb{N}'\to\infty} a_l$$

Definition einer Cauch-Folge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ heißt Cauchy-Folge, falls $\forall\epsilon > 0\, \exists N_\epsilon : |a_k - a_l| < \epsilon \quad \forall k, l > N_\epsilon$

Satz (Cauchysches Konvergenzkriterium) Die Folge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ist konvergent $\Longleftrightarrow$ Die Folge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge.

2.3 ϵ-Umgebung

Sei $\{x_k\}_{x\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ eine Punktfolge. Für $\epsilon > 0$ heißt

$$U_\epsilon(x) = \{z \in \mathbb{R}^n : |x - z| < \epsilon\}$$

ϵ-Umgebung von $x \in \mathbb{R}^n$ wobei die ϵ-Umgebung offen ist.

- Punktfolge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{R}^n} \subset \mathbb{R}^n$ konvergent, $x = \lim_{k\to\infty} x_n \Longleftrightarrow \forall\epsilon > 0\, \exists N_\epsilon : x_k \in U_\epsilon(x) \quad \forall k \geq N_\epsilon$
- Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt offen in $\mathbb{R}^n$ wenn gilt:

$$\forall x \in M \exists\epsilon > 0 : U_\epsilon(x) \subset M$$

- $x \in M$ heißt innerer Punkt von M, wenn gilt,

$$\exists\epsilon > 0 : U_\epsilon(x) \subset M$$

- Die Menge aller inneren Punkte wird als offener Kern $\underline{M}$ bezeichnet.
  $M = [a, b] \quad \underline{M} = (a, b)$
  Folgerung: $\underline{M}$ ist offen in $\mathbb{R}^n$

- $x \in \mathbb{R}^n$ heißt Häufungspunkt einer Menge M, falls

$$\forall \epsilon > 0 : U_\epsilon(x) \cap M \neq \emptyset$$

- Die Menge $\overline{M}$ heißt abgeschlossene Hülle von M.
  $\overline{M} = \{\text{Menge aller Häufungspunkte von } M\}$
  Offenbar gilt: $M \subset \overline{M}$

- Die Menge M heißt abgeschlossen, falls $\mathbb{R}^n \setminus M$ offen ist.

Satz Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. M ist in $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen
2. $M = \overline{M}$
3. $\{x_l\}_{l \in \mathbb{N}} \subset M, \quad x = \lim_{l \to \infty} x_l \in M$
4. $\{z \in \mathbb{R}^n : z \text{ Häufungspunkt von } M \setminus \{z\}\} \subset M$

Definition $\overline{M} \setminus \underline{M} =: \delta M$ Rand Falls eine Menge M in $\mathbb{R}^n$ sowohl offen als auch abgeschlossen ist, dann gilt $M = \mathbb{R}n$

- $M = (a, b]$
- $\underline{M} = (a, b), \quad \overline{M} = [a, b]$
- $\overline{M} \setminus \underline{M} = \{a, b\} = \delta M$
- $\overline{M} = \overline{\overline{M}}$

Definition Sei M eine Menge. M heißt kompakt, falls jede Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ eine konvergente Teilfolge besitzt mit Grenzwert $x = lim_{k \to \infty} x_k \in M$

Folgerung: $M \subset \mathbb{R}^n$ kompakt $\Longleftrightarrow$ beschränkt und abgeschlossen.

Satz von Heine-Borel $M \subset \mathbb{R}^n$ sei kompakt, dann enthält jede offene Überdeckung von M, $M \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k, \quad A_k$ offen, eine endliche überdeckung

$$M \subset \bigcup_{l=1}^{m} A_{k_l}$$

Banachscher Fixpunktsatz Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $\varphi : D \to D \subset \mathbb{R}^n$ in D. Dann hat die Fixpunktgleichung $x = \varphi(x)$ genau eine Lösung $x \in D$ und für $x_0 \in D$ konvergiert die Methode der sukzessiven Approximation, d.h.

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad x = \lim_{k\to\infty} x_k$$

Weiters gelten die a priori-Abschätzung

$$|x - x_k| \leq \frac{q^k}{1-q}|x_1 - x_0|$$

und a posteriori-Abschätzung

$$|x - x_k| \leq \frac{q}{1-q}|x_k - x_{k-1}|$$

Sei $\varphi : D \to D = \overline{D} \subset \mathbb{R}^n$ eine Selbstabbildung und eine Kontradiktion

$$|\varphi(x) - \varphi y| \leq q|x - y| \quad \forall x, y \in D, q < 1$$

Dann konvergiert die Methode der sukzessiven Approximation, $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, für jedes beliebige $x_0 \in D$ gegen die eindeutig bestimmte Lösung $x \in D$ der Fixpunktgleichung $x = \varphi(x)$, und es gibt die a priori-Abschätzung

$$|x - x_k| \leq \frac{q^k}{1-q}|x_1 - x_0|$$

Satz Sei $\varphi : U_\beta(0) \to \mathbb{R}^n$ Kontraktion mit $q < 1$ und sei $\beta > 0$ derart, sodass

$$|\varphi(0)| \leq \beta(1-q)$$

Dann sind alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes für $x_0 \in U_\beta(0)$ erfüllt

- größter Häufungspunkt $\approx$ limes superior

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, a_k = \lim_{k\to\infty} \sup\{a_l, l \geq k\}$$

- kleinster Häufungspunkt $\approx$ limes inferior

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}\, a_k = \lim_{k\to\infty} \inf\{a_l, l \geq k\}$$

- Zahlenfolge konvergent

$$\Longleftrightarrow \overline{\lim_{k\to\infty}}\, a_k = \underline{\lim_{k\to\infty}}\, a_k$$