1. In welchen Punkten sind die folgenden Funktionen stetig?
   (a) $f(x) := [x]$ wobei für $x \in \mathbb{R}$ gilt $x = k + y$ für $k \in \mathbb{Z}$, $y \in [0, 1)$, dann ist $[x] = y$.
   (b) $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
2. Sind diese Reihen konvergent?
   (a) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{\ln^k k}$
   (b) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^{\ln k} k}$
   (c) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^n [e - (1 - 1/n)^n]$
   (d) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$
3. Berechne die Grenzwerte von
   (a) $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
   (b) $\lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$
   (c) $\lim_{x\to\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$
   (d) $\lim_{x\to 0} x^{\sin x}$
   (e) $\lim_{x\to\infty} (e^x - 1)^{\frac{1}{x}}$
4. Sei f_n eine Funktionenfolge, f die Punktweise Grenzfunktion und gelte für eine positive Nullfolge Reeller Zahlen a_n, $|f_n - f| < a_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist f_n gleichmäßig konvergent gegen f.
5. Sind die folgenden Funktionenfolgen gleichmäßig konvergent auf $[0, 1]$?
   (a) $f_n(x) = nx^n(1 - x)$
   (b) $f_n(x) = \frac{1}{1+(nx-1)^2}$
   (c) $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}$

Analysis Tutorium 22.01.2007

Notiztitel 22.01.2007

2a.) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{(\ln k)^k}$

Cauchy Verdichtung:

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konv $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k}$

wobei a_k monoton fallend, $a_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

über Wurzelkriterium:

$$\frac{\overset{\nearrow 1}{\sqrt[n]{n}}}{\underset{\searrow \infty}{\sqrt[\cancel{k}]{(\ln n)^{\cancel{k}}}}} \to \frac{1}{\infty} = 0 < 1 \to \text{konv ?}$$

2b.)

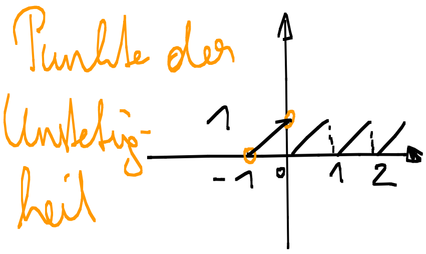
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\ln^{\ln k} \cdot k} \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt[k]{(\ln k \cdot k)^{\frac{\ln k}{k}}}} \to 1 \to \text{keine Aussage}$$

2d.)

$$\sum \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2} = \sqrt[\cancel{k}]{\left(\frac{k}{(k+1)}\right)^{k^{\cancel{2}}}} = \frac{k^k}{(k+1)^k} = \frac{1^k}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} = \frac{1}{e}$$

1a.) $f(x) : [x]$ für $x \in \mathbb{R}$

$x = k + y \quad , k \in \mathbb{Z} , y \in [0,1]$



$$\lim_{x \to k-} [x] = 1$$

$$\lim_{x \to k+} [x] = 0$$

$$x_n = k - \frac{1}{n} = (k-1) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$y_n = h + \frac{1}{n}$

$\lfloor \ \rfloor$ Gaus-Klammern

$[x_n] = 1 - \frac{1}{n} \to 1$

$[\ ]$ Gebrochen Rational

$[y_n] = \frac{1}{n} \to 0$

$x_0 \in (h, h+1)$

jede $\mathbb{R}$ ist eine $\mathbb{Z} + [0,1]$

$\varepsilon > 0$

$\delta := \min(\varepsilon, |x_0 - h|, |x_0 - h+1|\}$, $x \in (\delta - x_0, \delta + x_0)$

jede $\mathbb{R}$ so darstellbar ist:

$\begin{cases} x_0 = h + y_0 \\ x = h + y \end{cases}$

δ ist das kleinste der 3

$|[x] - [x_0]| = |\cancel{h} + y - \cancel{h} - y_0|$

$= |y - y_0| = |(x_0 - h) - (x - h)| < \varepsilon$

$\left|\underbrace{y_0 + h}_{x_0} - k - [\underbrace{y - k}_{X}] - h\right]$

11b.) $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ so genannte Patologische Funkt

Sei $x_0 \in \mathbb{Q}$, Sei $a_n \in (0,1) \cap (\mathbb{R}/\mathbb{Q})$

mit $a_n \to 1$

$x_n := a_n x_0 \to x_0$

aber $a_n x_0 \notin \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$

$x_0 \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \exists$ Folge $x_n \in \mathbb{Q}$,

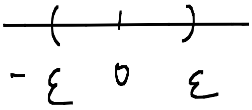
$x_n \to x_0$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \neq 0$

$x_0 = 0$

Sei $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon \leq \frac{1}{n+1}$



$x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$\Rightarrow |f(x) - f(0)|$

$= |f(x)| \leq |x| < \varepsilon$

$\overline{Z \cdot Q} = \in Q$

3c.) $\lim\limits_{x \to \infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$

setze $y = e^x$

$\lim\limits_{y \to \infty} \left(y^{\frac{1}{e^y}} \right) = \lim\limits_{y \to \infty} e^{\frac{\ln y}{e^y}} = 1$

3b.) $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ $\quad | \; y = \frac{1}{x}$ Substituieren

$(1 + \frac{1}{y})^y = e$

3e.) $(1+\frac{1}{x}) = e \qquad \exists n < x < n+1$

$$(1+\frac{1}{n})^n \leq (1+\frac{1}{x})^x \leq (1+\frac{1}{n})^{n+1}$$

$$\underbrace{(1+\frac{1}{n})^n}_{} \cdot (1+\frac{1}{n})$$

$$e \leq \qquad \leq \xrightarrow[n\to\infty]{} e \cdot 1$$

Durch Einschluss muss f gegen e konv.

—

3d.) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x} = \lim\limits_{x\to\infty} \sin(x) \ln x$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!}\right) \cdot \ln x \qquad ?$$