Analysis Zusammenfassung

Notiztitel 18.01.2007

Banachscher Fixpunktsatz:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q\,|x-y| \quad \forall x,y \in D,\ q<1$$

$D \to D$ notwendig

→ siehe BSp 27, 28 (27.11.2006)

Konvergenzkriterien Reihen:

- Nullfolge als Vorraussetzung → sonst divergent
- Minoranten, Majoranten Kriterium: 31c (04.12.06)

  finde Reihe mit entweder

  - $x_n \leq b_n$ $\quad b_n \to$ konvergent

  oder

  - $x_n \geq b_n$ $\quad b_n \to$ konvergent

  für fast alle $\{x_n\}$

  $\Rightarrow x_n$ ist konvergent

- Grenzwertregel:

  $$\lim \frac{a_n}{b_n} = c \in \mathbb{R} \qquad b_n \to \text{konvergent}$$

  für fast alle $\qquad \Rightarrow a_n$ konvergent

- Quotientenkriterium: 30c (27.11.2006)

  $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$$

  absolut konvergent

  $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \begin{cases} >1 \ldots \text{divergent} \\ =1 \ldots \text{keine Aussage} \\ <1 \ldots \text{konvergent} \end{cases}$$

- Wurzelkriterium $q < 1$ 305 (27.11.2006)
3.1a/b (04.12.2006)

$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ .. konvergent

$\sqrt[n]{|a_n|} > q$ .... divergent

absolut konvergent

- Kriterium von Raabe

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq 1 - \frac{\beta}{n}$ .... konvergent

absolut konvergent

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 - \frac{1}{n}$ ... divergent

Stetigkeit:

- $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad |x - x_0| < \delta \quad \varepsilon, \delta > 0$

36 a/b/c (11.12.2006)

- $\lim_{x \to h+} f(x) = \lim_{x \to h-} f(x)$ 38 b (11.12.2006)

lim von links = lim von rechts.

- $\exists \lim_{n \to \infty} f_n : |f(x) - (\lim_{n \to \infty} f_n)| < \varepsilon \Rightarrow$ gleichmäßig konvergent

- $|f(x) - f(x_0)| \leq L \cdot |x - x_0| \quad L \in \mathbb{R}^+$ Lipschitz-stetig

Reihendarstellung:

- $\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$

$\exp(1) = e$

$\exp(0) = 1$

$\exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$

$\cdot \sin(z) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{z^{2l+1}}{(2l+1)!}$ $\sin(0) = 0$

$\sin(-z) = -\sin(z)$

$\cdot \cos(z) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{z^{2l}}{(2l)!}$ $\cos(0) = 1$

$\cos(-z) = \cos(-z)$

$\exp(z) = \cos(z) + i \cdot \sin(z)$

$\sin^2(z) + \cos^2(z) = \cos(0) = 1$

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

$\sin(a+b) = \sin(a)\sin(b) + \cos(a)\cos(b)$

$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(b)$

$\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$

$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(b)$

$\cdot \sinh(z) = \frac{1}{2}[\exp(z) - \exp(-z)]$

$\cdot \cosh(z) = \frac{1}{2}[\exp(z) + \exp(-z)]$

$\exp(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Funktionen:

$f(x) = a^x$ | $f(x) = e$ | $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

$f^{-1}(x) = e^{x \ln a}$ | $f^{-1}(x) = \ln$ | $e^x = (1 + \frac{1}{n})^x$

$\ln(u+v) = \ln(u) \cdot \ln(v)$

$\ln(u-v) = \ln\left(\frac{u}{v}\right)$

$x^0 = 1 \qquad x^1 = x \qquad \frac{1}{\infty} = 0$

$0^0 = 1 \qquad 0^1 = 0$

$0^{x>0} = 0$

sei g stetig, dann ist auch $g(g(x))$ stetig

z.B.: $\sqrt{\sqrt{x}}$ ist stetig, da $\sqrt{}$ stetige Funktion