Analysis Vo Teil 1   22 01 2007

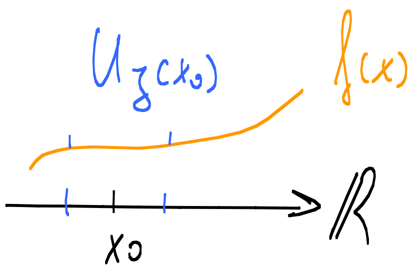
Notiztitel 11.02.2007

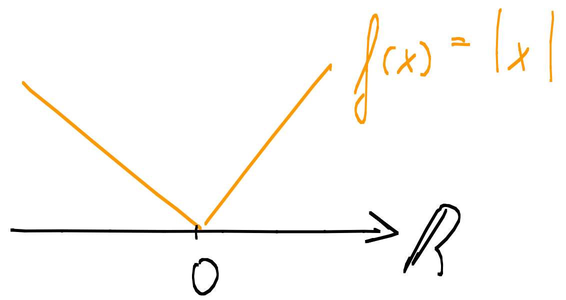
Funktion $f(x)$, $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, heißt stetig in $x_0 \in D$, falls jede konvergente Folge von Punkten $\{x_0\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{k \to \infty} x_k = x_0$ eine konvergente Folge von Bildern erzeugt.

$$\text{Bilder } g(x_k) \to \lim_{k \to \infty} f(x_k) = f(x_0)$$

das heißt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in D \cap U_\delta(x_0)$$





$$x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{für } x \in D \setminus \{x_0\}$$

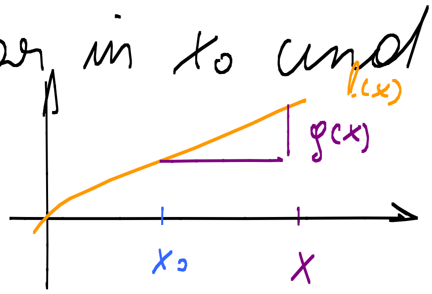
Für eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ und einem Häufungspunkt x_0 von $D \setminus \{x_0\}$ heißt die Abbildung Differentialquotient.

Existiert für $x \to x_0$ der Funktionenlimes

$$f(x_0) = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{für } x_0 \in D,$$

dann heißt $f(x)$ differenzierbar in x_0 und

$\frac{df}{dx}$ Differentialquotient.



Für jede Folge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ $\lim_{k \to \infty} x_k = x_0$, $x_k \neq x_0$ ist dies gleichbedeutend mit der Existenz des Grenzwertes:

$$f'(x_0) = \lim_{k \to \infty} \frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0}$$

$f(x)$ heißt in $D' \subset D$ differenzierbar, falls $f(x)$ für alle $x_0 \in D'$ differenzierbar ist.
$f(x)$ heißt stetig differenzierbar, falls die Ableitung $f'(x)$ eine stetige Funktion ist.

Beispiel:

$$f(x) = \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$g'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \overbrace{2 \cdot \cos \frac{x + x_0}{2} \cdot \sin \frac{x - x_0}{2}}^{\text{Additionstheorem}}$$

$$= \cos \frac{x + x_0}{2} \cdot \frac{2}{x - x_0} \cdot \sum (-1)^n \frac{\left(\frac{x - x_0}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\frac{2}{x - x_0} = \left(\frac{x - x_0}{2}\right)^{-1}$$

$$= \cos\frac{x+x_0}{2} \sum (-1)^n \frac{\left(\frac{x-x_0}{2}\right)^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \cos\frac{x+x_0}{2}\left[1-\frac{1}{3!}\left(\frac{x-x_0}{2}\right)^2+\frac{1}{5!}\left(\frac{x-x_0}{2}\right)^4 \dots\right]$$

Überlegung:
- Reihe absolut konvergent
- für $x \to x_0$: $\to \cos x$

$$\Rightarrow (\sin x)' = \cos(x)$$

Analog zur links-/rechtsseitigen Stetigkeit definieren wir die
- linksseitige Ableitung:

$$f'(x_0-0) = \lim_{x \to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

- rechtsseitige Ableitung:

$$f'(x_0+0) = \lim_{x \to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$f(x)$ ist in x_0 differenzierbar, wenn gilt:
- links- und rechtsseitiger Grenzwert existieren,
- links- und rechtsseitiger Grenzwert stimmen überein.