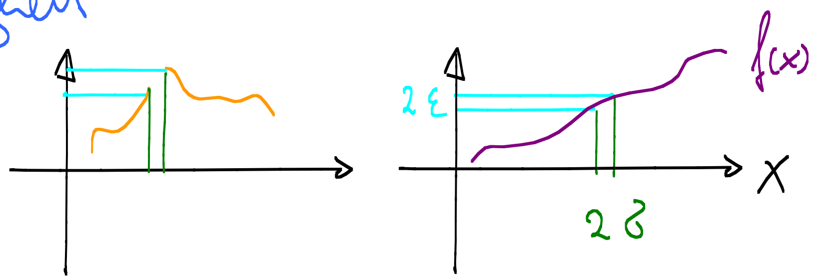
Analysis - Rep Teil 3 23012007

Notiztitel 23.01.2007

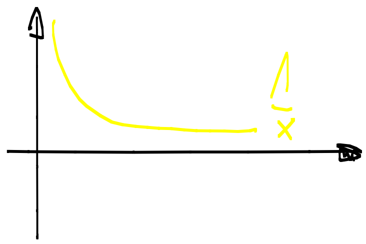
Stetigkeit:



schlecht handhabbar

→ Sprünge

ändert sich x,
ändert sich f(x)
extrem / sprunghaft



besser handhabbar

ändert sich x nur ein bisschen,
soll sich die Funktion auch
nur ein bisschen ändern.

stetig, die in einzelnen
Punkten ein ε gefunden
werden kann so das
gilt:

gleichmäßig stetig heißt
es gibt ein ε das
global gilt;

punktweise: $\forall x_0 \in I : \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

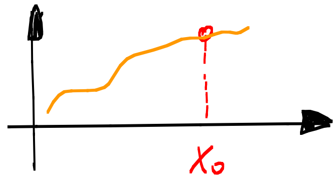
gleichmäßig $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x_0 \in I$

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

auch über Grenzwerte:

alle $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ .... $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$



Stetigkeit: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Alle Folgen müssen gegen selben Grenzwert konv.

Elementare Funktionen (e, sin, polynome, ...) sind stetig; sie bleiben in kombination auch stetig.

z.B.: $f(x) = e^{x} \sin x + x^2 \cos(x^2)$ ... stetig

$f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ $\quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ stetig

falls $=0$ dann nicht stetig, per def. ausgeschlossen

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{(x+1)}}$$

$$= \lim_{x\to -1} (x-1) = -2$$ Existiert

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} & x \neq -1 \\ -2 & x = -1 \end{cases} \qquad D(f_2) = \mathbb{R}$$

$f_2(x)$ ist stetig auf ganz $D(f_2)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Einziger Ort der Unstetigkeit ist $x=0$ und $y=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{y \to 0} f(r\cos\varphi \cdot r\sin\varphi)$$

für mehrdimensionale Funktionen versuchen auf eine Variable zu reduzieren.

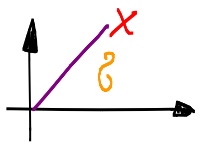
$$\lim_{r\to 0} \frac{r^{\cancel{3}} \cdot \cos\varphi \sin^2\varphi}{\cancel{r^2}} = \lim r \cdot \cos\varphi \sin^2\varphi = |\dots| \leq 1$$

$$\to \text{stetig} = 0 = f(0,0)$$

über ε, δ:

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2} - 0\right| = \frac{|x| \cdot y^2}{x^2+y^2} = \frac{\sqrt{x^2}\, y^2}{x^2+y^2}$$

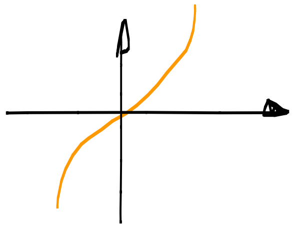
$$\leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}\,\cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{(x^2+y^2)}} = \sqrt{x^2+y^2}$$



$$= \|\vec{x} - 0\| = \delta$$

$$\varepsilon \leq \delta$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x} =$$



$$\sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \Big| \quad \cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+\cancel{1}}}{(2n+1)!} = \lim_{x\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{x^0}{1!} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}}_{0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2) - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^6}\left(\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2)^{2n}}{2n!}\right) - 1 + \frac{1}{2}x^4\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1}}{\cancel{x^8}}\left(\cancel{1} - \frac{\cancel{x^4}}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{x^8}}{4!} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n (x^4)^n}{(2n)!} - \cancel{1} + \frac{\cancel{x^4}}{\cancel{2}}\right)$$

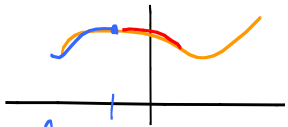
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{4!} + \frac{1}{x^8}\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n (x^4)^n}{(2n)!} = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{4!} + \sum \frac{(-1)^n (x^4)^n (x^4)^{-2}}{(2n)!} \quad \Big| \quad \frac{1}{x^8} = (x^4)^{-2}$$

$$f(x)\begin{cases} \frac{1}{x} & x<-2 \\ ax^2 & -2\le x<1 \\ x+b & 1\le x \end{cases}$$

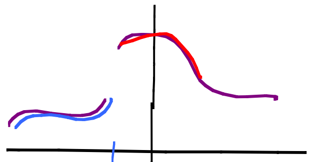
wähle a, b so das f(x) stetig wird

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) \overset{!}{=} \lim_{x\to -2^+} f(x)$$



$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ Stetig

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{1}{x} = \lim_{x\to -2^+} \frac{1}{x} = -\frac{1}{2}$$



$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ unstetig

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} ax^2 = \lim_{x\to -2^-} ax^2 = 4a$$

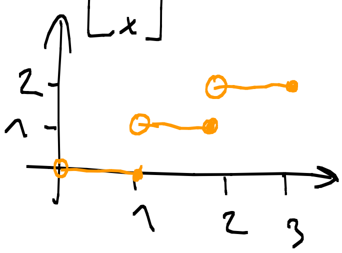
$\to a = -\frac{1}{8}$ / $4a = -\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(-\frac{1}{8}x^2\right) = -\frac{1}{8}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x+b) = 1+b$$

$\to b = -\frac{9}{8}$ / $1+b = -\frac{1}{8}$

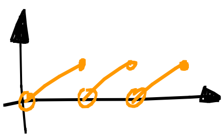
Gaussklammer:



$$\lim_{x\to n^-} \lfloor x \rfloor = (n-1)$$

$$\lim_{x\to n^+} \lfloor x \rfloor = n$$

$x - \lfloor x \rfloor$ stetig auf $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$



$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to n^-} x-\lfloor x\rfloor = n-(n-1) = 1 \\ \lim_{x\to n^+} x-\lfloor x\rfloor = n-n = 0 \end{array}\right\} \neq \text{ unstetig an } \mathbb{N}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\cdot\sinh(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\right)$$

nur Therme 5 oder höherer Ordnung

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\underbrace{x - \frac{x^3}{3!}}_{\text{ersten paar Glieder}} + O(x^5)\right)\cdot\left(\underbrace{x + \frac{x^3}{3!}} + O(x^5)\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(x^2 + \cancel{\frac{x^4}{3!}} - \cancel{\frac{x^4}{3!}} - \cancel{\frac{x^6}{(3!)^2}} + O(x^6)\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + O(x^6)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} + \underbrace{O(x^4)}_{\xrightarrow{x\to 0} 0} = 1$$

Formal richtig über Cauchy Produkt

$$\cosh(x) + \sinh(x) = e^x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Beispiel:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

sind Potenzen im Nenner größer als im Zähler → unstetig

Potenzen höher als im Nenner → stetig

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}, 0\right) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 - 0^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 0^2} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq f(0,0)$$

Folge konv. gegen 0

$\Rightarrow$ Funktion unstetig in $(0,0)$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$f(x) = x^2 : \quad |f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |(x+x_0)(x-x_0)|$$

$$= |x+x_0|\,|x-x_0|$$

ε sei beliebig aber fest gewählt

$x_0 \in I$ aber fest gewählt

$$|x+x_0|\,|x-x_0| \leq |x-x_0|(|x|+|x_0|) < \varepsilon$$

$$|x-x_0| < \frac{\varepsilon}{|x|+|x_0|} \underset{\substack{\uparrow \\ x_0 \neq 0}}{\leq} \frac{\varepsilon}{|x_0|}$$

oder:

$$|x+x_0|\,|x-x_0| = |x-x_0|\,|x \overbrace{-x_0+x_0}^{+0} + x_0| \qquad \Big|\ |x-x_0| < \delta$$

$$= |x-x_0|\,|x-x_0| |.2x_0|$$

$$< |\delta|\,|\delta| + |2x_0|$$

$$< \delta^2 + |\delta\, 2x_0| < \varepsilon$$

$$\delta(\delta + |2x_0|) < \varepsilon$$

oder:

$$\delta^2 + \delta|2x_0| < \varepsilon$$

$$\delta^2 + \delta|2x_0| - \varepsilon < 0$$

$$\delta^2 + 2\delta|x_0| + \overbrace{x_0^2 - x_0^2}^{+0} - \varepsilon < 0$$

$$(\delta + x_0)^2 - x_0^2 - \varepsilon < 0$$

$$(\delta + x_0)^2 < x_0^2 + \varepsilon$$

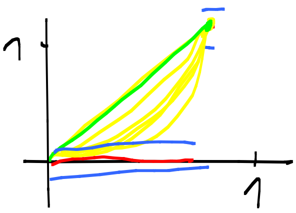
$$\delta + |x_0| < \sqrt{x_0^2 + \varepsilon}$$

$$\delta < \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - |x_0|$$

Funktionenfolge:

$$\{f\}_{n=1}^{\infty}$$

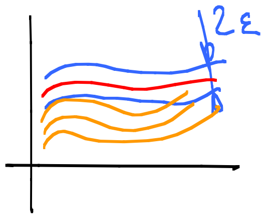
$$f_n(x) = x^n \qquad D(f_n) = [0,1]$$



Es gibt Ausreisser des ε-gebiets

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n$$

$$\left.\begin{array}{ll} f_n(1) = 1 & \text{für alle } n \in \mathbb{N} \\ f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 & \text{für } x \in [0,1) \end{array}\right\} \text{Punktweise Konvergenz}$$



Grenzfunktion
ε-Bereich } Alle Funktionen sollten hierin liegen

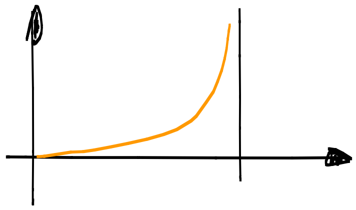
Beispiel: $f_n(x) = x^n \qquad D(f) = [0,1] = I$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\sup_{x\in I} |x^n - f(x)| = \sup_{x\in[0,1)} |x|^n$$

$$\sup_{x\in[0,1)} |x|^n = 1 \not\to 0$$



$M = \{1, 2, 3\}$

min $= 1$ max $= 3$

$M' = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$

max $M' = 1$

inf

$0 \leq m \quad \forall m \in M$

$-1 \leq m \quad \forall m \in M$

$-\pi \leq m \quad \forall m \in M$

Beispiel: $f_n(x) = x^n(1-x)^n$

Überprüfen sie $\{f_n\}$ in $[0,1] = I$ auf gleichmäßige Konvergenz.

1.) $f_n(0) = 0 \quad f_n(1) = 0$

2.) $f_n(x) = \underbrace{x}_{<1}{}^n (\underbrace{1-x}_{<1})^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ | Zahlen $< 1^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$x \in (0,1)$

$\Rightarrow$ Grenzfunktion $f(x) = 0$ auf I

$\Rightarrow$ Punktweise konvergent

3.) $\sup_{[0,1]} |\underbrace{x^n(1-x)^n}_{f_n(x)} - 0| =$

$$g_n'(x) = n x^{n-1}(1-x)^n + n x^n (1-x)^{n-1} \overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow$ liefert Zahlen, ausprobieren und sup geg.: f ... beliebige Funktion

$$g(n) = n \cdot \sin\left(\frac{f(x)}{n}\right)$$

Lösungsmöglichkeit:

$$n \gg 1: \approx n \cdot \left(\frac{f(x)}{n} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{f(x)}{n}\right)^3\right)\right)$$

sin für kleine Argumente ~ Argument $\quad = f(x)$

$$f(x) = \frac{e^{-2x}}{n}$$

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n(x)| = \left|\frac{e^{-0}}{n}\right| = \frac{1}{n} \to 0$$
