Analysis - Konversatorium 06.12.2006

Notiztitel 06.12.2006

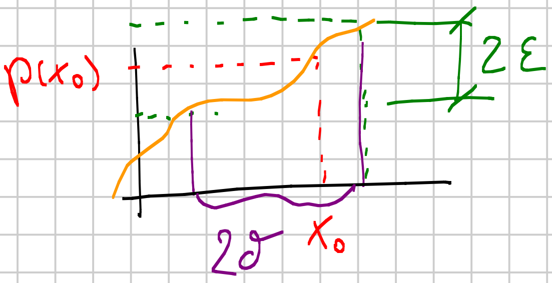
Beispiel zur Stetigkeit mit δ und ε

Stetigkeit einer lin-Funktion ?

ε-δ Kriterium:

p ist stetig in $x_0 \in D$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |x-y| < \delta \Rightarrow |p(x)-p(y)| < \varepsilon$$



Es muss eine Funktion gefunden werden die im Bereich 2δ ihre Urpunkte hat.

⇒ eine stetige Funktion kann ohne absetzen geplottet werden

ist nicht stetig, da f(x) Werte um x_0 cont. sind;

Beispiel: $p(x) = \sqrt{x^2+4}$ $\quad p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\varepsilon > 0$ $\qquad |p(x)-p(y)| = \left|\sqrt{x^2+4} - \sqrt{y^2+4}\right|$

$$= \frac{|x^2-y^2|}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{y^2+4}} = \frac{|x-y||x-y|}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{y^2+4}}$$

$$= |x-y| \left(\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+4} + \sqrt{y^2+4}} \right)$$

Abschätzen über Δ:

$$\leq |x-y| \cdot \left(\frac{|x|}{\sqrt{x^2+4} + \underbrace{\sqrt{y^2+4}}_{\geq 0}} + \frac{|y|}{\underbrace{\sqrt{x^2+4}}_{\geq 0} + \sqrt{y^2+4}} \right)$$

$$\leq |x-y| \left(\frac{|x|}{\sqrt{x^2+4}} + \frac{|y|}{\sqrt{y^2+4}} \right)$$

$$= |x-y| \left(\underbrace{\sqrt{\frac{x^2}{x^2+4}}}_{<1} + \underbrace{\sqrt{\frac{y^2}{y^2+4}}}_{<1} \right)$$

$$p(x) - p(y) < \underbrace{|x-y| \, 2}_{\varepsilon}$$

$$|x-y| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |p(x) - p(y)| < \varepsilon$$

Beispiel 2:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

untersuche Stetigkeit in $(0,0)$

$$|f(x,y) - \underbrace{f(0,0)}_{=0}| = \left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right| = |x| \underbrace{\left| \frac{xy}{x^2+y^2} \right|}_{<c}$$

$$xy < c(x^2+y^2)$$

$c = \frac{1}{2}$ $$\frac{1}{c}xy < x^2+y^2$$

$$0 < x^2-2xy+y^2 = (x-y)^2$$

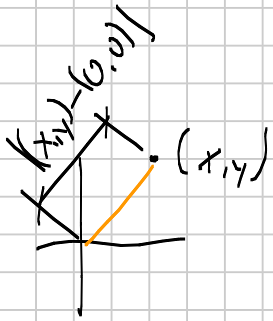
$$\frac{1}{2} > \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$x^2+y^2 > 2xy$$

$$x^2-2xy+y > 0$$

$$|f(x) - f(0,0)| < \frac{|x|}{2}$$

$$|(x,y)-(0,0)| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$



$$\Rightarrow \frac{|x|}{2} < \delta = \varepsilon$$

Lösungen der 1. Übungsklausur:

1a.) $\left|\frac{x-1}{x+2}\right| > x$ für $x \in (-\infty,-2) \cup \left(-2, \frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)$

$\left|\frac{x-2}{x+3}\right| > x$ für $x \in (-\infty,-3) \cup \left(-3, \frac{-4+\sqrt{25}}{2}\right)$

1b.) $|z-4i| = z+2 \Rightarrow \operatorname{Im} z = 0$

$z = a+bi$

$$|a-4i| = a+2 \iff \sqrt{a^2+4^2} = a+2 \quad |^2$$

$$\cancel{a^2} + 16 = \cancel{a^2} + 4a + 4$$

$$12 = 4a = 2 = 3$$

$$|2-3i| = 2+1 \quad \Rightarrow b = 0$$

$$\sqrt{a^2+a} = a+1 \quad |^2$$

$$a^2+a = a^2+2a+1 \quad \Rightarrow 2 = 4$$

2a.) $$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k = \frac{1}{4}\left[1+(-1)^{n-1}(2n+1)\right]$$

$n=1$ $\quad 1 = 1$

$n \to n+1$ $$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k + (-1)^{n+1-1}(n+1)$$

$$= \frac{1}{4}\left[1+(-1)^{n-1}(2n+1)\right] + (-1)^n (n+1)$$

$$= \frac{1}{4}\left[1+(-1)^{n-1}(2n+1) + 4(-1)^n(n+1)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[1+(-1)^n \left(\quad \ldots\ldots \right.\right.$$

2b.) $$\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{-n} \geq \frac{3}{4}$$

über Bernuli

$$\cancel{(1+x)^{-n} \geq 1-nx}$$

$$(1+x)^{-n} \geq 1+n\frac{x}{1+x}$$

$$\left(\frac{4n+1}{4n}\right)^{-n} = \left(\frac{4n}{4n+1}\right)^n = \left(\frac{4n+1-1}{4n+1}\right)^n$$

$$= \left(1 - \frac{1}{4n+1}\right)^n \geq 1 - \frac{n}{4n+1} = 1 - \frac{1}{4 \underbrace{\frac{1}{n}}_{>0}}$$

$$\geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

3a.) $M = \left\{ 3 - \frac{2}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}_0 \right\}$ $\quad 3 - \frac{2}{n+1}$ mon. wachsend

$$\inf M = 1, \quad \sup M = 3$$

$M = \left\{ 4 - \frac{3}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}_0 \right\}$ $\inf M = 1$

$\sup M = 4$

3b.) $$a_n = \frac{3 + (-1)^n n - 2n^2}{(-1)^n n^2 + 3} = \frac{\cancel{n^2}\left(\frac{3}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n} - 2\right)}{\cancel{n^2}\left((-1)^n + \frac{3}{n^2}\right)}$$

$$a_{2n} = -2 = \frac{0 + 0 - 2}{1 + 0}$$

$$a_{2n+1} = 2$$

$HP = \{-2, 2\}$

$$a_n = \frac{4n^2 + 3n + (-1)^n}{(-1)^n n^2 + 1} ; \quad HP = \{-4, 4\}$$

4.) $$a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$$

$a_0 = -\frac{1}{2}$ $\quad a_3 = 1{,}429$

$a_1 = 4$

$a_2 = 1{,}75$

(1) $a_n > 1 \quad \forall n \geq 1$

$a_1 > 1$ ✓

$a_n > 1 \Rightarrow -\frac{1}{a_n} > -1 \Rightarrow 2 - \frac{1}{a_n} > 2 - 1 = 1$ ✓

(2) $a_n > a_{n+1}$

$\frac{1}{a_n} < \frac{1}{a_{n+1}}$

$-\frac{1}{a_n} > -\frac{1}{a_{n+1}}$

$\underbrace{2 - \frac{1}{a_n}}_{a_{n+1}} > \underbrace{2 - \frac{1}{a_{n+1}}}_{a_{n+2}}$

$a_n \leq 4 \quad \forall n \geq 1$

Grenzwert: $a = \lim_{n \to \infty} a_n$

$a^2 + 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1$

5.) Physiker: $\varphi(x) = x^3 + \frac{1}{8}$

a.) $D = [0, \frac{1}{2}] \quad x \geq 0$

$\varphi(x) \geq \frac{1}{8} > 0$ ✓

$\varphi(x) \geq \frac{1}{8} + \frac{1}{8} > 0$ ✓

b.) $x_{n+1} = \varphi(x_n), \; x_0 \in D$

$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |x^3 - y^3| = |x-y|\,|\underbrace{x^2}_{<\frac{1}{4}} + \underbrace{xy}_{<\frac{1}{4}} + \underbrace{y^2}_{<\frac{1}{4}}|$

$$< \frac{3}{4} |x-y| \qquad q = \frac{3}{4} < 1 \quad ✓$$

c.) $[0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ $\quad |\varphi(x) - \varphi(y)| < |x-y| \, |\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}|$

$$= 1 \, |x-y|$$

keine Kontraktion da $q \overset{!}{<} 1$;

5.) Mathematiker

$$b_n = \frac{a_n}{\sum_{k=1}^{n} a_k} \qquad a_n > 0 \ \forall n$$

$$a_n < \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\frac{1}{a_n} > \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} a_k} \quad | \cdot a_n$$

$$1 > \frac{a_n}{\sum a_k} = b_n$$

b.) laut Satz von Bolzano Weierstrass

mit 1 Häufungspunkt

c.) $a_n > c > 0 \ \forall n$ $\qquad b_n \to 0$

a_n ist beschränkt

$\hookrightarrow a_n < K$

$$b_n = \frac{a_n}{\sum_{k=1}^{n} a_k} < \frac{a_n}{n \cdot c}$$

$$\frac{K}{c} \cdot \frac{1}{n} \to 0$$