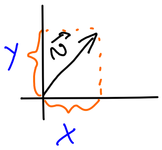
Vo 01-03-2007

Donnerstag, 01. März 2007
08:38

Vektoren

$\mathbb{R}^2$ Vektor hat Richtung & Länge



$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2$

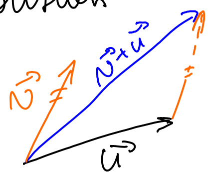
$(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^3 \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^n \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, \dots x_n) : x_i \in \mathbb{R} \; i = 1 \dots n \}$

Addition:



$\vec{v} + \vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$

Multiplikation: $\lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Definition:

Vektorraum über $\mathbb{R}$:

Ist eine Menge V mit 2 Operationen:

$+ : V \times V \rightarrow V$ ... Vektor

$\cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$

Es muss gelten:

Menge $(V, +)$ bildet eine abelsche Gruppe

1. Kommutativ: $u+v = v+u \quad \forall u, v \in V$

Menge $(V, +)$ bildet eine abelsche Gruppe

1.) kommutativ: $u+v = v+u \quad \forall u,v \in V$

assoziativ: $w+(u+v) = (w+u)+v$

Bsp.: $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + x_1 \\ y_n + x_n \end{pmatrix}$

2.) neutrales Element: $\exists\, 0 \in V : u + 0 = 0 \quad \forall u \in V$

$\forall u \; \exists u' : u + u' = 0 \qquad -u = u'$

3.) weiters soll gelten: $1 \cdot u = u \quad \forall u \in V$

4.) Distributiv: $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$

$(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \;\; \forall v \in V$

assoziativ: $(\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda(\mu \cdot v) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \;\; \forall v \in V$

Vektoren wurden erfunden um lineare Zusammenhänge zu beschreiben:

Beispiel:

- Für 1L Kaffee: 0,8 L Wasser, 0,2 L Milch, 100 g Zucker
- Für 10L Kaffe: $\begin{pmatrix} 0.8 \\ 0,2 \\ 100 \end{pmatrix} \times 10 = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1000 \end{pmatrix}$
- Für 1L Tee: 1 L Wasser, 50 g Zucker
- Für 20L Kaffee + 10L Tee:

$$20 \cdot \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,2 \\ 100 \end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 + 10 \\ 4 + 0 \\ 2000 + 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 4 \\ 2500 \end{pmatrix}$$

Meist tritt die Frage umgekehrt auf, als:

Lineares Gleichungssystem:

Lineares Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
x + y &= 1 \\
x - y &= 2
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n &= b_n
\end{aligned}\right\} \text{immer lösbar}
$$

- linear heißt x^n mit $n = 1$
- nicht linear heißt x^n mit $n > 1$

Lösen durch Vektoren:

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \\
\vdots \\
a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
b_1 \\
b_n
\end{pmatrix}
$$

einfaches Bsp.: $a_{11} x_{11} = b_1$

$$\Rightarrow x_{11} = \frac{b_1}{a_{11}} = a_{11}^{-1} \cdot b_1$$

$$
A = \begin{pmatrix}
a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\
\vdots \\
a_{m1}, & a_{m2}, & \dots, & a_{mn}
\end{pmatrix}
\qquad
\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}
$$

formal $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

$\Rightarrow$ Lösung: $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$

Definition:

Eine $m \times n$ Matrix ist ein Zahlenschema

$$A = (a_{ij}) \qquad \begin{aligned} i &= 1 \dots m \\ j &= 1 \dots n \end{aligned}$$

m Zeilen = Anreihung von n Spaltenvektoren der Dim m

n Spalten = Anreihung von m Zeilenvektoren m Zeilen Anreihung von n Spaltenvektoren der Dim m

n Spalten = Anreihung von m Zeilenvektoren der Dim n

$\mathbb{R}^{m\times n}$ = Menge aller $m \times n$ Matrixen bilden einen Vektorraum

$A = (a_{ij}) \qquad B = (b_{ij})$

$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \qquad i = 1 \dots m$

$\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij}) \qquad j = 1 \dots m \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

$$+B = \begin{pmatrix} 1-1 & 2+1 & 3+0 \\ -1+2 & -3+1 & 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$5 \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ -5 & -15 & 10 \end{pmatrix}$$

Nullmatrix: $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{n \text{ Spalten}} \Big\} m$ Zeilen

Quadratische Matrix $m = n$

Diagonal Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nm} \end{pmatrix}$

Einheits Matrix: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Matrixmultiplikation:

$$\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 0{,}8 \\ 0{,}2 \\ 100 \end{matrix}}_{K} & \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 50 \end{matrix}}_{T} \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} K \\ T \end{array} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \cdot 20 + 1 \cdot 10 \\ 0{,}2 \cdot 20 + 0 \cdot 10 \\ 100 \cdot 20 + 50 \cdot 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 4 \\ 2500 \end{pmatrix}$$

$$A = (a_{ij}) \quad \begin{matrix} i = 1 \dots m \\ j = 1 \dots n \end{matrix}$$

$$B = (b_{ij}) \quad \begin{matrix} i = 1 \dots n \\ j = 1 \dots p \end{matrix}$$

$$A \cdot B = C = (c_{ij}) \quad \begin{matrix} i = 1 \dots m \\ j = 1 \dots n \end{matrix}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Beispiel:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{2 \times 3} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{2 \times 3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & 15 \end{pmatrix}}_{2 \times 3}$$

Tabelle

			1	1	2
			-1	1	3
			-1	0	2
1	-1	2	0	0	3
2	3	1	-2	5	15

$$0 = 1 \cdot 1 + (-1 \cdot -1) + 2(-1)$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & -y & +z \\ 2x & +y & +3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x - y + z &= -1 \\ 2x + y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

Bemerkung:

1.) Matrixmultiplikation ist assoziativ

$$\underbrace{\underbrace{(\underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times p}{B})}_{m \times p} \cdot \underset{p \times q}{C}}_{m \times q} = \underbrace{\underset{m \times n}{A} \cdot \underbrace{(\underset{n \times p}{B} \cdot \underset{p \times q}{C})}_{n \times q}}_{m \times q}$$

Beispiel:

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \overset{B}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

$A \cdot B$ ✓

$B \cdot A \Rightarrow$ nicht definiert

A, B $n \times n$ Matrix: $A \cdot B \neq B \cdot A$

2.) Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ

3.) nicht nullteilerfrei

es kann $A \cdot B = 0$, wobei $A, B \neq 0$

Beispiel: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

jedoch bei reellen Zahlen:

$(a \cdot b) = 0 \Rightarrow a = 0 \lor b = 0$

$$(a \cdot b) = 0 \Rightarrow a = 0 \lor b = 0$$

Die Einheitsmatrix ist das Element bezüglich Multiplikation:

$$\underset{m \times n}{A} \cdot I_n = A$$

Beispiel:

Fibbonacci-Zahlen:

$$\begin{aligned}
F_0 &= 1 \\
F_1 &= 1 \\
F_2 &= 1 + 1 = 2 \\
F_3 &= 1 + 2 = 3 \\
F_4 &= 2 + 3
\end{aligned}$$